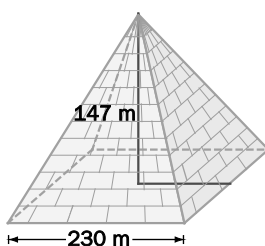


# 13 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

## ACTIVIDADES INICIALES

- 13.I. La Gran Pirámide tiene una base cuadrada de unos 230 metros de largo, y una altura aproximada de 147 metros.

Imagina que se quiere cubrir con una sábana blanca. ¿Cuántos metros cuadrados de tela se necesitarían?



La apotema de cada triángulo mide unos 187 metros, por lo que las caras laterales tienen una superficie de unos 86 000 metros cuadrados.

- 13.II. Las pirámides son uno de los símbolos más representativos de Egipto, pero otras culturas también construyeron monumentos con esta forma. Investiga otras regiones del mundo en las que se conserven pirámides.

El ejemplo más sencillo son las pirámides de los incas y los mayas, en América.

- 13.III. Podemos encontrar reproducciones de pirámides construidas con distintos materiales, con supuestos efectos beneficiosos para la salud, o para atraer la buena suerte. ¿Crees que este tipo de amuletos tiene alguna base científica? Debate con tus compañeros.

Actividad de debate en el aula.

## ACTIVIDADES PROPUESTAS

- 13.1. Halla las áreas lateral y total de un ortoedro de dimensiones 4, 5 y 7 centímetros.

$$A_L = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 7 = 96 \text{ cm}^2 \quad A_T = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 7 = 166 \text{ cm}^2$$

- 13.2. Calcula el área total de un prisma regular hexagonal de 6 centímetros de altura, sabiendo que el lado de la base mide 4 centímetros, y su apotema, 3,5.

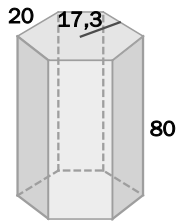
$$A_T = p \cdot (h + a_p) = 6 \cdot 4 \cdot (6 + 3,5) = 228 \text{ cm}^2$$

- 13.3. Halla el área total y lateral de un cubo de arista  $a$  centímetros.

$$A_L = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a = 4a^2 \quad A_T = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a = 6a^2$$

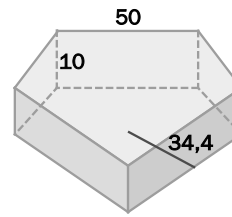
13.4. (TIC) Calcula el área total de los siguientes prismas regulares cuyas longitudes vienen dadas en milímetros.

a)



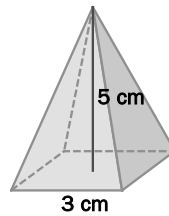
$$a) \quad A_T = p \cdot (h + a_p) = 6 \cdot 20 \cdot (80 + 17,3) = 11\,676 \text{ cm}^2$$

b)



$$b) \quad A_T = p \cdot (h + a_p) = 5 \cdot 50 \cdot (10 + 34,4) = 11\,100 \text{ cm}^2$$

13.5. Calcula las áreas lateral y total de la pirámide regular de la figura.

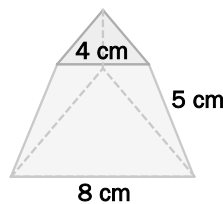


$$A_p = \sqrt{1,5^2 + 5^2} \approx 5,22 \text{ cm}$$

$$A_L = \frac{1}{2} \cdot p \cdot A_p = 31,32 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 40,32 \text{ cm}^2$$

13.6. Calcula las áreas lateral y total del siguiente tronco de pirámide regular de bases dos triángulos.



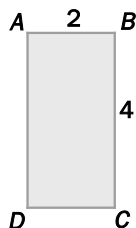
La medida de la altura  $H$  en este tronco de pirámide es  $H = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \approx 4,58 \text{ cm}$ .

$$A_L = \frac{p_1 + p_2}{2} H = \frac{24 + 12}{2} \sqrt{21} = 18\sqrt{21} \approx 82,49 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_{\text{BASE MAYOR}} + A_{\text{BASE MENOR}} = 18\sqrt{21} + \frac{8 \cdot \sqrt{8^2 - 4^2}}{2} + \frac{4 \cdot \sqrt{4^2 - 2^2}}{2} = 18\sqrt{21} + 4\sqrt{48} + 2\sqrt{12} \approx 117,1 \text{ cm}^2$$

13.7. Actividad resuelta.

13.8. Calcula el área lateral de los cilindros que se generan al girar el rectángulo alrededor del lado  $AB$  y alrededor del lado  $AD$ . ¿Son iguales?

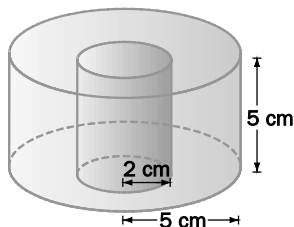


Alrededor del lado  $AB$ ,  $A_L = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi \text{ cm}^2$

Alrededor del lado  $AD$ ,  $A_L = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 2 = 16\pi \text{ cm}^2$

Sí, ambas áreas son iguales.

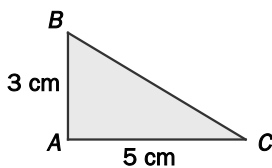
13.9. (TIC) Calcula el área de la siguiente pieza.



El área de la arandela es igual al área total del cilindro exterior, más el área lateral del cilindro interior y menos las dos bases del cilindro interior. Así:

$$A = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 3,14 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3,14 \cdot 2^2 = 351,68 \text{ cm}^2$$

13.10. (TIC) Halla las áreas lateral y total del cono que se genera al girar el triángulo rectángulo alrededor del cateto  $AB$ .



La generatriz del cono es  $g = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5,83 \text{ cm}$ .

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3,14 \cdot 5 \cdot 5,83 = 91,53 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + \pi \cdot r^2 = 91,53 + 3,14 \cdot 5^2 = 170,03 \text{ cm}^2$$

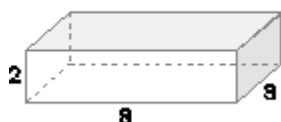


13.27. Actividad interactiva.

13.28. Actividad resuelta.

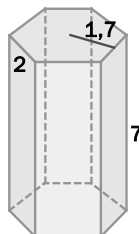
13.29. Calcula los volúmenes de los siguientes prismas, cuyas medidas están dadas en cm.

a)



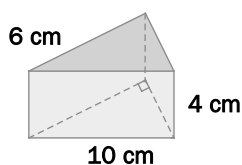
$$a) \quad V = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48 \text{ cm}^3$$

b)



$$b) \quad V = \frac{p \cdot a_p}{2} \cdot h = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1,7}{2} \cdot 7 = 71,4 \text{ cm}^3$$

13.30. Halla el volumen del prisma de la figura.



$$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \frac{6 \cdot \sqrt{10^2 - 6^2}}{2} \cdot 4 = \frac{6 \cdot \sqrt{64}}{2} \cdot 4 = 96 \text{ cm}^3$$

13.31. (TIC) Halla el volumen de un prisma hexagonal regular cuyo lado de la base y altura miden 5 y 8 centímetros, respectivamente.

$$\text{La apotema de la base mide } a_p = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = 4,33 \text{ cm.}$$

$$\text{El área de la base es } A_{\text{BASE}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4,33}{2} = 64,95 \text{ cm}^2$$

$$\text{El volumen del prisma es } V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 64,95 \cdot 8 = 519,6 \text{ cm}^3.$$

13.32. (TIC) Es invierno y hace mucho frío. Una piscina de 10 metros de larga por 6 de ancha se ha cubierto con una capa de hielo de 3 cm de espesor. ¿Cuántos litros de hielo habrá?

$$V = 10 \cdot 6 \cdot 0,03 = 1,8 \text{ m}^3 = 1800 \text{ dm}^3 = 1800 \text{ L}$$

13.33. Queremos hacer un tetra brik de base cuadrada y con capacidad de medio litro. ¿Cuánto cartón necesitamos?

$$0,5 \text{ L} = 0,5 \text{ dm}^3 = 500 \text{ cm}^3$$

Si llamamos  $a$  al lado de la base y  $h$  a la altura, medidos en centímetros, sabemos que el volumen es:

$$V = a^2 \cdot h = 500 \text{ cm}^3$$

La cantidad de cartón necesaria viene dada por:

$$A_T = 2a^2 + 2ah + 2ah = 2a^2 + 4ah \text{ cm}^2$$

De este modo, la solución dependerá del valor de  $a$  y  $h$ ; por ejemplo, si  $h = 20$  cm, tendremos:

$$a^2 \cdot h = 500 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

y, por tanto, necesitaríamos  $2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 \cdot 20 = 450 \text{ cm}^2 = 4,5 \text{ m}^2$  de cartón.

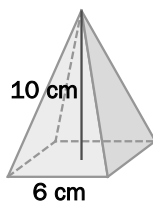
Otra posibilidad es asumir que el tetra brik tiene forma de cubo, es decir,  $a = h$ , de donde  $a^3 = 500$  y, por tanto,  $a = \sqrt[3]{500} \approx 7,94$  cm, con lo que necesitaríamos  $6 \cdot a^2 \approx 378 \text{ cm}^2$  de cartón. De hecho, este es el caso en el que menos cantidad de cartón se necesitaría.

13.34. Actividad interactiva.

13.35. Actividad resuelta.

13.36. Calcula el volumen de las siguientes pirámides regulares.

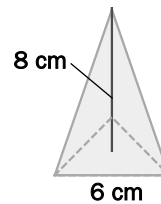
a)



$$a) \quad A_{\text{BASE}} = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \frac{36 \cdot 10}{3} = 120 \text{ cm}^3$$

b)

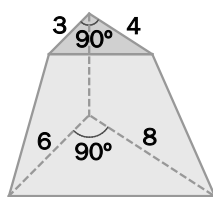


$$b) \quad \text{Altura de la base: } h_B = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,2 \text{ cm}$$

$$A_{\text{BASE}} = \frac{6 \cdot 5,2}{2} = 15,6 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \frac{15,6 \cdot 8}{3} = 41,6 \text{ cm}^3$$

13.37. (TIC) Calcula el volumen del tronco de pirámide sabiendo que las medidas vienen dadas en metros y que las alturas de las pirámides completa y sobrante son de 6 y 3, respectivamente.



$$\text{Volumen de la pirámide completa: } V_1 = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 6 = 48 \text{ m}^3$$

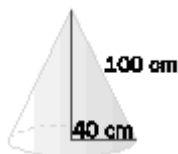
$$\text{Volumen de la pirámide sobrante: } V_2 = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 3 = 6 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen del tronco de pirámide: } V_1 - V_2 = 48 - 6 = 42 \text{ m}^3$$

13.38. Actividad resuelta.

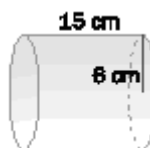
13.39. (TIC) Calcula el volumen de estos cuerpos.

a)



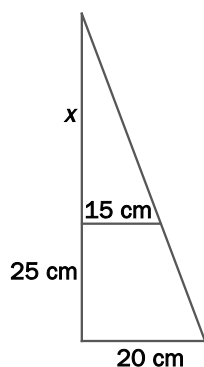
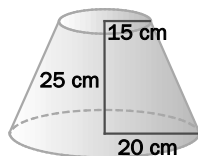
$$\text{a) } V = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 40^2 \cdot \sqrt{100^2 - 40^2}}{3} = 153\,485,74 \text{ cm}^3$$

b)



$$\text{b) } V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 1695,6 \text{ cm}^3$$

13.40. (TIC) Calcula el volumen del tronco de cono.



El volumen será la diferencia entre el volumen del cono completo y el del cono sobrante.

Observemos la figura. Aplicando la semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{15} = \frac{x + 25}{20} \Rightarrow 20x = 15x + 375 \Rightarrow 5x = 375 \Rightarrow x = 75 \text{ cm}$$

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

$$V = \frac{3,14 \cdot 20^2 \cdot 100}{3} - \frac{3,14 \cdot 15^2 \cdot 75}{3} \approx 24204 \text{ cm}^3$$

13.41. Actividad resuelta.

13.42. (TIC) Calcula el volumen de una esfera de diámetro 8 centímetros.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 4^3}{3} \approx 268 \text{ cm}^3$$

13.43. (TIC) Halla el volumen de una semiesfera de radio 3 metros.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3 \cdot 2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{6} = 56,52 \text{ cm}^3$$

13.44. (TIC) Un semicírculo de radio 3 centímetros gira alrededor de su diámetro. ¿Qué cuerpo geométrico genera? Calcula su volumen.

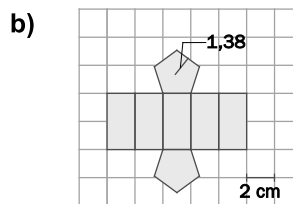
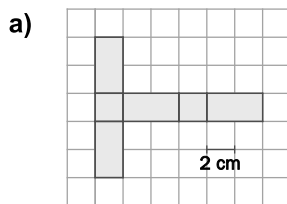
Se genera una esfera de radio 3 cm.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} = 113,04 \text{ cm}^3$$

## EJERCICIOS

Área de los cuerpos geométricos

13.45. (TIC) Calcula el área total de los cuerpos geométricos que admiten los siguientes desarrollos planos.



a)  $10 \cdot 2^2 = 40 \text{ cm}^2$

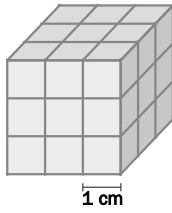
b) Área del pentágono =  $\frac{p \cdot a_p}{2} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 1,38}{2} = 6,9 \text{ cm}^2$

Área total =  $2 \cdot 6,9 + 10 \cdot 2^2 = 53,8 \text{ cm}^2$

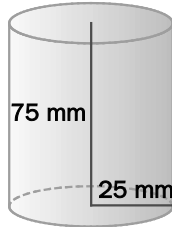


13.46. (TIC) Halla el área total de los siguientes cuerpos geométricos.

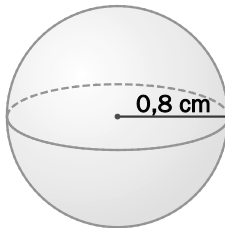
a)



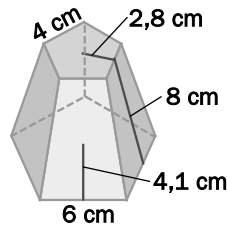
b)



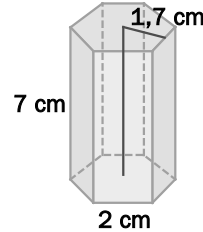
c)



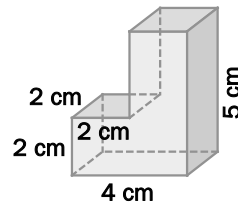
d)



e)



f)



a)  $A_T = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ cm}^2$

b)  $A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot 3,14 \cdot 25 \cdot 75 + 2 \cdot 3,14 \cdot 25^2 = 15\,700 \text{ mm}^2$

c)  $A_T = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 0,8^2 = 8,04 \text{ cm}^2$

d)  $A_L = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot H = \frac{30 + 20}{2} \cdot 8 = 200 \text{ cm}^2$       $A_T = 200 + \frac{30 \cdot 4,1}{2} + \frac{20 \cdot 2,8}{2} = 289,5 \text{ cm}^2$

e)  $A_T = p \cdot (h + a_p) = 12 \cdot (7 + 1,7) = 104,4 \text{ cm}^2$

f) Observemos que el área total se puede calcular como el área del ortoedro de dimensiones 4, 2 y 5 cm, y restándole el área de dos rectángulos iguales de dimensiones 2 y 3 cm. Por tanto:

$$A_T = 2 \cdot (4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5) - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 76 - 12 = 64 \text{ cm}^2$$

13.47. Calcula el área lateral y total de un cilindro de radio de la base 45 dam y de altura 50 dam.

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3,14 \cdot 45 \cdot 50 = 14\,130 \text{ dam}^2$$

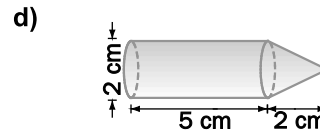
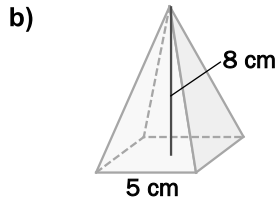
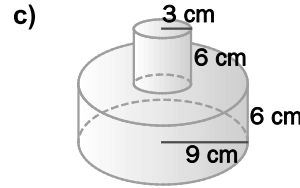
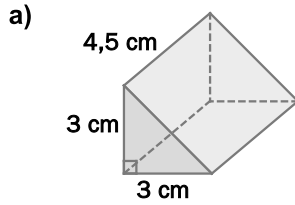
$$A_T = A_L + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 14\,130 + 2 \cdot 3,14 \cdot 45^2 = 26\,847 \text{ dam}^2$$

13.48. Un cono tiene por radio de la base 33 m y por generatriz 65 m. Calcula sus áreas lateral y total.

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3,14 \cdot 33 \cdot 65 = 6735,3 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + \pi \cdot r^2 = 6735,3 + 3,14 \cdot 33^2 = 10\,154,76 \text{ m}^2$$

13.49. (TIC) Halla el área total de los siguientes cuerpos.



a)  $A_T = 2 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} + 4,5 \cdot \sqrt{3^2 + 3^2} + 2 \cdot 3 \cdot 4,5 = 9 + 4,5\sqrt{18} + 27 \approx 55,09 \text{ cm}^2$

b)  $a_p = 2,5 \text{ cm}$       $A_p = \sqrt{8^2 + 2,5^2} \approx 8,38 \text{ cm}$

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (A_p + a_p) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot (8,38 + 2,5) = 108,8 \text{ cm}^2$$

c) El área total de la pieza se puede calcular sumando el área total del cilindro de debajo más el área lateral del cilindro de encima, es decir,

$$A_T = 2 \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 6 + 2 \cdot 3,14 \cdot 9^2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 6 = 960,84 \text{ cm}^2$$

d) El área total de la pieza se puede calcular sumando el área total del cono más el área lateral del cilindro.

La generatriz del cono es  $g = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ cm}$ .

Por tanto:  $A_T = 3,14 \cdot 1 \cdot 2,24 + 3,14 \cdot 1^2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 5 = 41,57 \text{ cm}^2$

13.50. Calcula el área total de un cubo sabiendo que el perímetro de la base es de 24 decímetros.

El lado del cubo mide  $l = \frac{24}{4} = 6 \text{ dm}$ ; por tanto,  $A_T = 6 \cdot 6^2 = 216 \text{ dm}^2$ .

13.51. (TIC) Calcula las áreas lateral y total de un prisma heptagonal regular sabiendo que el lado de la base mide 25 milímetros, que la apotema de la base es de 26 milímetros y que la altura del prisma es de 5 centímetros.

$$A_L = p \cdot h = 7 \cdot 25 \cdot 5 = 8750 \text{ mm}^2$$

$$A_T = p \cdot (h + a_p) = 7 \cdot 25 \cdot (50 + 26) = 13\,300 \text{ mm}^2$$

13.52. La base de un ortoedro es un rectángulo con medidas una doble de la otra y con perímetro de 18 decímetros. La tercera medida del ortoedro es el triple de la menor de la base. Calcula el área total de este cuerpo geométrico.

Las medidas del ortoedro son 3, 6 y 9 cm. Por tanto,  $A_T = 2 \cdot (3 \cdot 6 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot 9) = 198 \text{ cm}^2$ .

13.53. (TIC) Calcula el área total de un tetraedro si cada una de sus aristas mide 25 centímetros.

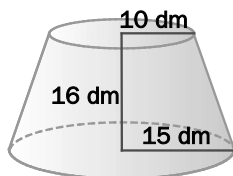
Todas las caras del tetraedro son triángulos equiláteros de lado 25 cm.

La altura de estas caras será  $h = \sqrt{25^2 - 12,5^2} = \sqrt{468,75} \approx 21,65$  cm.

El área de una cara será  $A = \frac{25 \cdot 21,65}{2} = 270,63$  cm<sup>2</sup>.

El área total del tetraedro es  $A_T = 270,63 \cdot 4 = 1082,52$  cm<sup>2</sup>.

13.54. Halla el área lateral del siguiente tronco de cono.



La generatriz del tronco de cono es  $g = \sqrt{16^2 + 5^2} = \sqrt{281} \approx 16,76$  dm.

El área lateral es  $A_L = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot g = 3,14 \cdot (10 + 15) \cdot 16,76 = 1315,66$  dm<sup>2</sup>.

### Unidades de volumen y capacidad

13.55. Copia y completa en tu cuaderno:

a) 45 hL = \_\_\_\_\_ L

b) 700 cL = \_\_\_\_\_ L

c) 72 daL = \_\_\_\_\_ hL

d) 4572,5 dL = \_\_\_\_\_ daL

a) 45 hL = 4500 L

b) 700 cL = 7 L

c) 72 daL = 7,2 hL

d) 4572,5 dL = 45,725 daL

e) 4500 dm<sup>3</sup> = \_\_\_\_\_ m<sup>3</sup>

f) 25 dam<sup>3</sup> = \_\_\_\_\_ hm<sup>3</sup>

g) 0,005 m<sup>3</sup> = \_\_\_\_\_ cm<sup>3</sup>

h) 0,03 hm<sup>3</sup> = \_\_\_\_\_ m<sup>3</sup>

e) 4500 dm<sup>3</sup> = 4,5 m<sup>3</sup>

f) 25 dam<sup>3</sup> = 0,025 hm<sup>3</sup>

g) 0,005 m<sup>3</sup> = 5000 cm<sup>3</sup>

h) 0,03 hm<sup>3</sup> = 30 000 m<sup>3</sup>

13.56. Expresa en litros las capacidades de:

a) 40 daL + 5L + 2 dL

b) 35 L + 45 dL + 370 cL + 4000 mL

c) 4 hL + 54 daL + 600 dL

d) 3,5 kL + 0,6 hL + 23 daL + 150 cL

a) 40 daL + 5 L + 2 dL = 400 L + 5 L + 0,2 L = 405,2 L

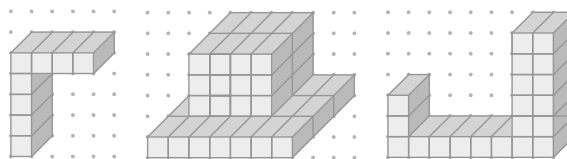
b) 35 L + 45 dL + 370 cL + 4000 mL = 35 L + 4,5 L + 3,7 L + 4 L = 47,2 L

c) 4 hL + 54 daL + 600 dL = 400 L + 540 L + 60 L = 1000 L

d) 3,5 kL + 0,6 hL + 23 daL + 150 cL = 3500 L + 60 L + 230 L + 1,5 L = 3791,5 L

Volumen de los cuerpos geométricos

13.60. Los siguientes cuerpos geométricos están formados por ladrillos todos iguales. Calcula el volumen de cada uno de ellos tomando como unidad el volumen de un ladrillo.



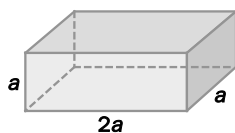
Primer cuerpo: 8 unidades cúbicas

Segundo cuerpo:  $21 + 24 = 45$  unidades cúbicas

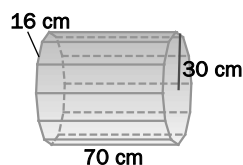
Tercer cuerpo:  $8 + 12 = 20$  unidades cúbicas

13.61. Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

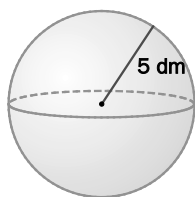
a)



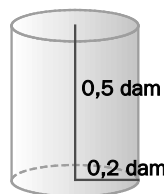
d)



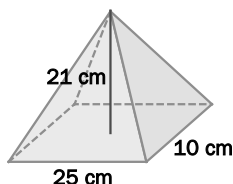
b)



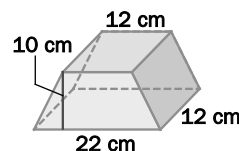
e)



c)



f)



a)  $V = 2a \cdot a \cdot a = 2a^3$

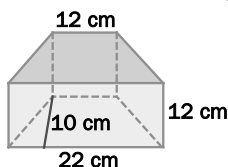
b)  $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 5^3}{3} = 523,33 \text{ dm}^3$

c)  $V = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \frac{25 \cdot 10 \cdot 21}{3} = 1750 \text{ cm}^3$

d)  $V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \frac{12 \cdot 16 \cdot 30}{2} \cdot 70 = 201\,600 \text{ cm}^3$

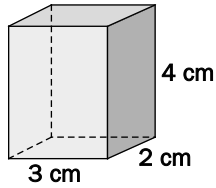
e)  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 0,2^2 \cdot 0,5 = 0,0628 \text{ dam}^3$

f) OJO: La figura no es un tronco de pirámide, ya que tiene aristas laterales paralelas. La figura es un prisma cuadrangular, como muestra el siguiente dibujo:



Por tanto:  $V = A_{\text{BASE}} \cdot h = \frac{(22 + 12) \cdot 10}{2} \cdot 12 = 2040 \text{ cm}^3$

13.62. Dibuja un ortoedro de dimensiones 2, 3 y 4 centímetros y calcula la medida de su volumen.



$$V = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^3$$

13.63. (TIC) Calcula cuántos litros caben en una esfera de radio 125 milímetros.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 125^3}{3} \approx 8\,177\,083 \text{ mm}^3 \approx 8,18 \text{ dm}^3 = 8,18 \text{ L}$$

13.64. Calcula el volumen de una pirámide de 3 centímetros de altura cuya base es un cuadrado de lado 4 centímetros.

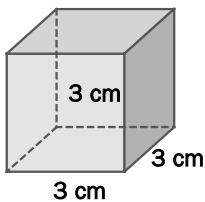
$$V = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot 3}{3} = 16 \text{ cm}^3$$

13.65. Calcula el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de la base mide 3 centímetros y que la altura mide dos veces el diámetro de la base.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 3^2 \cdot 12 = 339,12 \text{ cm}^3$$

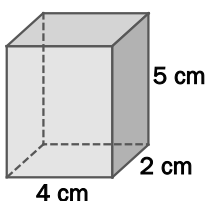
13.66. Dibuja un cubo de 27 centímetros cúbicos de volumen e indica la medida de su lado.

La medida del lado es  $l = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ cm}$ .

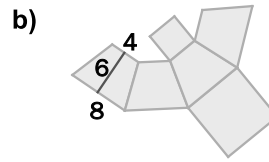
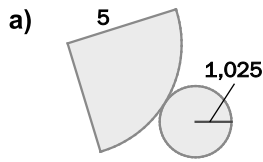


13.67. Dibuja un ortoedro con la única condición de que su volumen valga  $40 \text{ cm}^3$ . Indica las dimensiones que has escogido.

Por ejemplo, se pueden tomar las dimensiones 2, 4 y 5 cm.



13.68. Calcula el volumen de los cuerpos geométricos que admiten como desarrollo plano estas representaciones (unidades en metros).

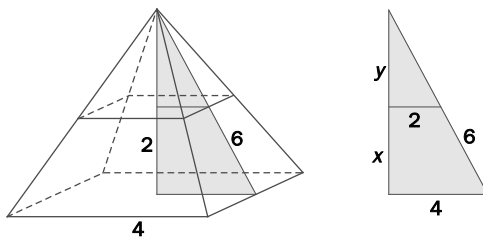


a) Se trata de un cono de generatriz 5 m y de radio de la base 1,025 m. La altura vale, por tanto,

$$h = \sqrt{5^2 - 1,025^2} \approx 4,89 \text{ m}$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{3,14 \cdot 1,025^2 \cdot 4,89}{3} = 5,38 \text{ m}^3$$

b) Se trata de un tronco de pirámide. El volumen será la diferencia entre el volumen de la pirámide completa y el de la pirámide sobrante. Observando el dibujo tenemos:



$$y = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} \approx 5,66 \text{ m}$$

$$\frac{y}{2} = \frac{x+y}{4} \Rightarrow y = x = 5,66 \text{ m}$$

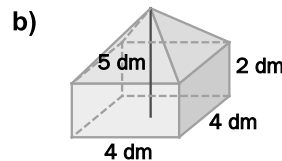
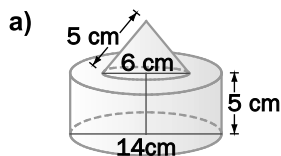
Por tanto:  $V = \frac{8^2 \cdot 11,32}{3} - \frac{4^2 \times 5,66}{3} = 211,31 \text{ m}^3$

13.69. (TIC) Calcula el volumen de un cono de altura 4,5 decímetros y de generatriz 5,3 centímetros.

El radio de la base del cono es  $r = \sqrt{5,3^2 - 4,5^2} = \sqrt{7,84} = 2,8 \text{ dm}$ .

El volumen es  $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{3,14 \cdot 2,8^2 \cdot 4,5}{3} = 36,93 \text{ dm}^3$ .

13.70. (TIC) Halla el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.



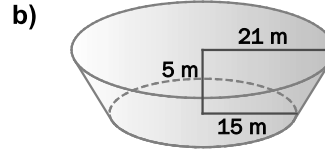
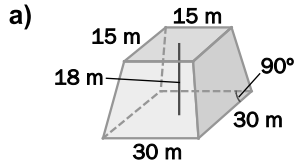
a) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de un cilindro y un cono:

$$V = 3,14 \cdot 7^2 \cdot 5 + \frac{3,14 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{5^2 - 3^2}}{3} \approx 807 \text{ cm}^3$$

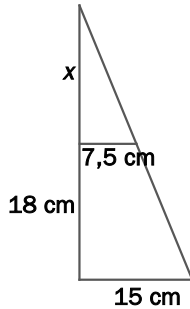
b) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de un ortoedro y una pirámide:

$$V = 4 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{4^2 \cdot 3}{3} = 48 \text{ dm}^3$$

13.71. (TIC) Calcula el volumen del tronco de pirámide y el tronco de cono.



- a) El volumen será la diferencia entre el volumen de la pirámide completa y el de la pirámide sobrante.



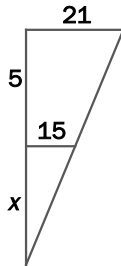
Observemos la figura. Aplicando la semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{7,5} = \frac{x+18}{15} \Rightarrow 15x = 7,5x + 135 \Rightarrow 7,5x = 135 \Rightarrow x = 18 \text{ m}$$

El volumen del tronco de pirámide es, por tanto:

$$V = \frac{30^2 \cdot 36}{3} - \frac{15^2 \cdot 18}{3} = 9450 \text{ m}^3$$

- b) El volumen será la diferencia entre el volumen del cono completo y el del cono sobrante.



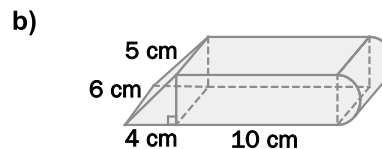
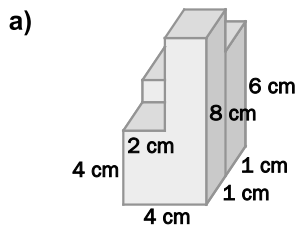
Observemos la figura. Aplicando la semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{15} = \frac{x+5}{21} \Rightarrow 21x = 15x + 75 \Rightarrow 6x = 75 \Rightarrow x = 12,5 \text{ m}$$

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

$$V = \frac{3,14 \cdot 21^2 \cdot 17,5}{3} - \frac{3,14 \cdot 15^2 \cdot 12,5}{3} = 5133,9 \text{ m}^3$$

13.72. (TIC) Halla el volumen de los siguientes cuerpos.



- a) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de tres ortoedros de medidas 2, 1 y 4 cm; 2, 1 y 8 cm, y 4, 1 y 6 cm, respectivamente.

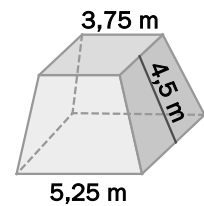
Por tanto:  $V = 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 8 + 4 \cdot 1 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^3$

- b) El volumen solicitado es la suma de los volúmenes de un prisma triangular, un ortoedro y medio cilindro.

Por tanto:  $V = \frac{4 \cdot \sqrt{5^2 - 4^2}}{2} \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot \sqrt{5^2 - 4^2} + \frac{3,14 \cdot \left(\frac{\sqrt{5^2 - 4^2}}{2}\right)^2 \cdot 6}{2} = 237,2 \text{ cm}^3$

PROBLEMAS

- 13.73. Calcula cuántos metros cuadrados de madera se necesitan para construir el podio representado en la figura si no tiene base inferior, es decir, se apoya directamente sobre el suelo.



$$\text{Área lateral: } A_L = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot H = \frac{4 \cdot 5,25 + 4 \cdot 3,75}{2} \cdot 4,5 = 81 \text{ m}^2$$

$$\text{Área de la base superior: } A_{\text{BASE SUP.}} = 3,75 \cdot 3,75 = 14,06 \text{ m}^2$$

$$\text{Área total de la figura: } A_T = 81 + 14,06 = 95,06 \text{ m}^2$$

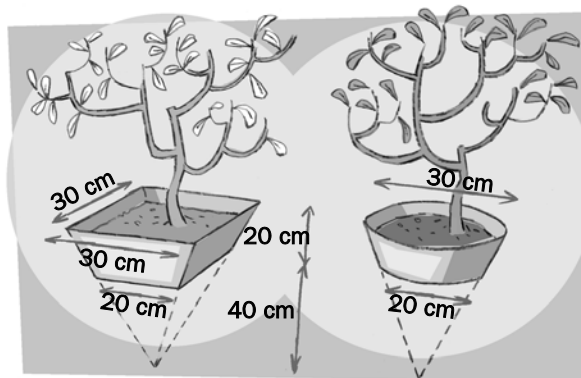
- 13.74. (TIC) Las dimensiones de una papelera cilíndrica son 20 centímetros de diámetro y 31 de altura. Calcula la superficie de material que se ha necesitado para fabricarla.

$$\text{Área lateral: } A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 31 = 1946,8 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área de la base inferior: } A_{\text{BASE INF.}} = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 10^2 = 314 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total de la figura: } A_T = 1946,8 + 314 = 2260,8 \text{ cm}^2 \approx 22,61 \text{ dm}^2$$

- 13.75. Las figuras representan jardineras. ¿En cuál de ellas hay que echar más tierra para que se llenen?



Queremos determinar qué figura de las dadas, el tronco de pirámide o el tronco de cono, tiene mayor volumen.

En ambos casos el volumen es la diferencia entre el volumen de la figura (pirámide o cono) completa y el de la figura sobrante.

En ambos casos la altura de la figura completa es de 60 cm.

Lo mismo sucede con la altura de la figura sobrante, que es de 40 cm.

Además, el lado de la base de la pirámide completa coincide con el diámetro de la base del cono completo, ambos miden 30 cm. Lo mismo sucede con el lado de la base de la pirámide sobrante y el diámetro de la base del cono sobrante, ambos miden 20 cm.

$$\text{El volumen del tronco de pirámide es, por tanto, } V_{\text{pirámide}} = \frac{30^2 \cdot 60}{3} - \frac{20^2 \cdot 40}{3} \approx 12666,67 \text{ cm}^3.$$

$$\text{El volumen del tronco de cono es, por tanto, } V_{\text{cono}} = \frac{\pi \cdot (30/2)^2 \cdot 60}{3} - \frac{\pi \cdot (20/2)^2 \cdot 40}{3} \approx 9943,33 \text{ cm}^3.$$

De este modo, obtenemos que el tronco de pirámide, es decir, la primera jardinera, es el de mayor volumen.



13.76. Calcula el área y el volumen de las siguientes cajas de cartón de las que se conocen sus tres dimensiones sabiendo que tienen tapa inferior, pero no superior.

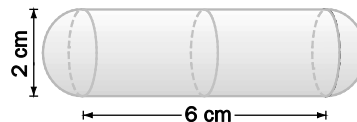
- a) Largo = 20 cm, ancho = 15 cm, alto = 25 cm  
 b) Largo = 2 m, ancho = 150 cm, alto = 8 dm  
 c) Largo = 0,2 dm, ancho = 1,5 cm, alto = 40 mm
- a)  $A = 20 \cdot 15 + 2 \cdot 15 \cdot 25 + 2 \cdot 20 \cdot 25 = 2050 \text{ cm}^2$   
 $V = 20 \cdot 15 \cdot 25 = 7500 \text{ cm}^3$
- b)  $A = 2 \cdot 1,5 + 2 \cdot 1,5 \cdot 0,8 + 2 \cdot 2 \cdot 0,8 = 8,6 \text{ m}^2$   
 $V = 2 \cdot 1,5 \cdot 0,8 = 2,4 \text{ m}^3$
- c)  $A = 2 \cdot 1,5 + 2 \cdot 1,5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 31 \text{ cm}^2$   
 $V = 2 \cdot 1,5 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^3$

13.77. Un depósito con forma de ortoedro y totalmente lleno de agua contiene 25 litros de este líquido. Dos de sus dimensiones son 40 y 50 centímetros, respectivamente. Calcula la medida de la tercera dimensión.

$$25 \text{ L} = 25 \text{ dm}^3 = 25\,000 \text{ cm}^3$$

La medida de la tercera dimensión será  $\frac{25000}{40 \cdot 50} = 12,5 \text{ cm}$ .

13.78. (TIC) Para almacenar cierto medicamento contra las inflamaciones óseas de caballos, se quiere construir cápsulas con forma de cilindro y semiesferas en sus extremos tal y como muestra la figura. Calcula la cantidad de superficie que se precisa para construir cada cápsula, así como su volumen en  $\text{cm}^3$ .



El área total será la suma del área lateral del cilindro y el área de la esfera.

Por tanto:  $A_T = 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot 3,14 \cdot 1^2 = 50,24 \text{ cm}^2$

El volumen será la suma de los volúmenes del cilindro y de la esfera.

Por tanto:  $V = 3,14 \cdot 1^2 \cdot 6 + \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 1^3 \approx 23 \text{ cm}^3$

13.79. Una persona respira 16 veces por minuto. Cada vez introduce en sus pulmones 4,25 decilitros de aire. ¿Cuántos metros cúbicos de aire ha inspirado en un día entero? ¿Y en una semana?

$$24 \cdot 60 \cdot 16 \cdot 4,25 = 97\,920 \text{ dL} = 9792 \text{ L} = 9792 \text{ dm}^3 = 9,792 \text{ m}^3 \text{ de aire al día}$$

$$9,792 \cdot 7 = 68,544 \text{ m}^3 \text{ de aire a la semana}$$

- 13.80. (TIC) Para transportar tierra se utilizan camiones capaces de mover 4,5 metros cúbicos como máximo. ¿Cuántos camiones serán necesarios para transportar la tierra cavada en una zanja de 5 metros de larga, 10 de ancha y 2 de profunda, suponiendo que al remover la tierra, esta aumenta en  $\frac{1}{8}$  su volumen primitivo?

El volumen de la zanja será:  $V = 5 \cdot 10 \cdot 2 = 100 \text{ m}^3$ .

El volumen de la tierra extraída después de removerla será:  $V = 100 \times \left(1 + \frac{1}{8}\right) = \frac{900}{8} = 112,5 \text{ m}^3$ .

El número de camiones necesario será:  $\frac{112,5}{4,5} = 25$ .

- 13.81. (TIC) Juan no ha cerrado bien el grifo del agua. ¿Cuántos litros se han desperdiciado si cada minuto gotean 5 centímetros cúbicos de agua y el grifo ha permanecido abierto durante 24 horas?

$24 \cdot 60 \cdot 5 = 7200 \text{ cm}^3 = 7,2 \text{ dm}^3 = 7,2 \text{ L}$

- 13.82. Se quiere abrir un cortafuegos para evitar el avance de un incendio forestal. Si se tarda 8,5 minutos en cavar un metro cúbico de tierra, ¿cuánto se tardará en abrir una zanja de 100 m de larga, 2 de ancha y 0,25 de profunda?

El volumen de la zanja es:  $V = 100 \cdot 2 \cdot 0,25 = 50 \text{ m}^3$ .

La zanja tardará en excavar, por tanto,  $50 \cdot 8,5 = 425$  minutos = 7 horas 5 minutos.

- 13.83. Queremos que un estanque con forma de ortoedro sea capaz de contener 8,5 m<sup>3</sup> de agua. ¿Qué altura deberá tener si se sabe que su base posee 500 dm<sup>2</sup> de superficie?

$A_{\text{BASE}} = 500 \text{ dm}^2 = 5 \text{ m}^2$

La altura será:  $h = \frac{V}{A_{\text{BASE}}} = \frac{8,5}{5} = 1,7 \text{ m}$ .

- 13.84. (TIC) El decímetro cúbico de mercurio tiene una masa de 13,6 kilogramos.

a) Calcula el peso de 2 litros de mercurio.

b) Indica el volumen, en centímetros cúbicos, que ocuparán 450 gramos de mercurio.

a)  $2 \text{ L} = 2 \text{ dm}^3$ ; por tanto, pesarán  $2 \cdot 13,6 = 27,2 \text{ kg}$ .

b)  $450 \text{ g} = 0,45 \text{ kg}$ ; por tanto, ocuparán  $\frac{0,45}{13,6} \approx 0,033 \text{ dm}^3 = 33 \text{ cm}^3$ .

- 13.85. De una lata de conservas se desprendió el papel que rodeaba el envase. Se midieron las dimensiones del papel y se obtuvo como resultado 14 centímetros de base y 4 de altura.

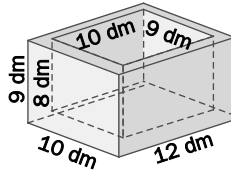
Calcula el volumen de la lata.

Calculamos el radio de la base:  $2 \cdot \pi \cdot r = 14 \Rightarrow r \approx 2,23 \text{ cm}$ .

El volumen es, por tanto:  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 2,23^2 \cdot 4 = 62,46 \text{ cm}^3$ .

- 13.86. (TIC) Un decímetro cúbico del material con que está construido el recipiente representado en la figura pesa 7,8 kilogramos.

Calcula cuánto pesa el recipiente.



El volumen de la figura será la diferencia entre el volumen del ortoedro exterior y el volumen del ortoedro interior.

$$\text{Volumen del ortoedro exterior: } V_1 = 9 \cdot 10 \cdot 12 = 1080 \text{ dm}^3$$

$$\text{Volumen del ortoedro interior: } V_2 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720 \text{ dm}^3$$

$$\text{Volumen del material: } V = V_1 - V_2 = 1080 - 720 = 360 \text{ dm}^3$$

$$\text{El recipiente pesa } 360 \cdot 7,8 = 2808 \text{ kg.}$$

- 13.87. Las dimensiones de una caja son: 36, 24 y 30 centímetros. En ella se quieren introducir paquetes con forma de ortoedro de aristas 5, 9 y 6 centímetros.

¿Cuántos paquetes caben en la caja?

$$\text{A lo largo caben: } 36 : 9 = 4 \text{ paquetes.}$$

$$\text{A lo ancho caben: } 24 : 6 = 4 \text{ paquetes.}$$

$$\text{A lo alto caben: } 30 : 5 = 6 \text{ paquetes.}$$

$$\text{En total caben: } 4 \cdot 4 \cdot 6 = 96 \text{ paquetes.}$$

**Nota:** Por ser el largo, ancho y alto de la caja múltiplos del largo, ancho y alto de cada paquete, respectivamente, cabe un número exacto de paquetes, quedando todo el espacio de la caja ocupado.

Por esta razón, también se puede calcular el número de paquetes que entran en la caja dividiendo el volumen de la misma por el volumen de cada paquete.

$$\text{Volumen de la caja: } 36 \cdot 24 \cdot 30 = 25\,920 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen de cada paquete: } 9 \cdot 6 \cdot 5 = 270 \text{ cm}^3$$

$$\text{Caben: } 25\,920 : 270 = 96 \text{ paquetes.}$$