

**Paso a paso**

87. Halla el siguiente límite y representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)$$

**Solución:**

9. Límites, continuidad y asíntotas  
Alba Maza Sánchez  
Óscar Arias López  
Paso a paso

Escribe la función y en **Análisis** elige **lim 0**

**Límite.**

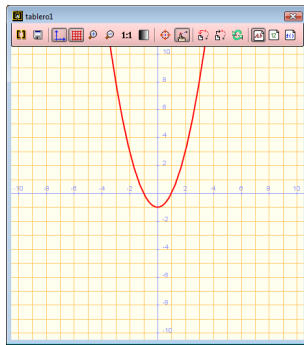
Ejercicio 87

$$f(x) = x^2 - 1 \rightarrow x \mapsto x^2 - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow 3$$

dibujar (f(x), {color = rojo, anchura\_linea = 2})

Cuando x → 2, se ve que y → 3



88. Halla los siguientes límites y representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

**Solución:**

Los símbolos **∞** Infinito positivo e **-∞** Infinito negativo están en **Símbolos**

Ejercicio 88

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \rightarrow x \mapsto \frac{2 \cdot x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

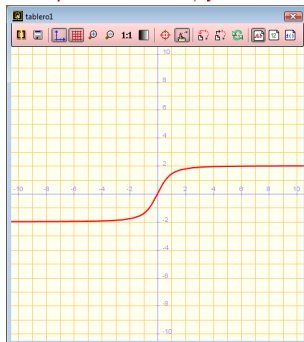
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow 2$$

dibujar (f(x), {color = rojo, anchura\_linea = 2})

Se observa en la función que cuando x → +∞, y → -2

Y también que cuando x → -∞, y → 2



89. Representa la siguiente función, y estudia sus discontinuidades.

$$y = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**Solución:**

Para dibujar una función en un intervalo se escribe la función una coma y los límites del intervalo separados por dos puntos alineados horizontalmente.

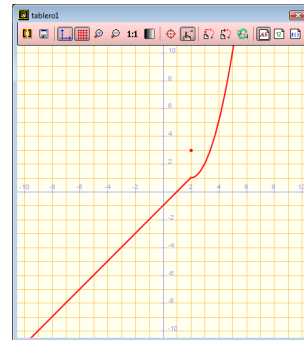
Ejercicio 89

dibujar (x - 1, -∞..2, {color = rojo, anchura\_linea = 2})

dibujar (punto(2, 3), {color = rojo}) → tablero1

dibujar (x^2 - 4x + 5, 2..+∞, {color = rojo, anchura\_linea = 2})

Es discontinua en x = 2, donde tiene una discontinuidad evitable.



90. Representa la siguiente función, halla sus asíntotas y represéntalas.

$$y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$$

**Solución:**

a) Asíntota oblicua utiliza de **Operaciones** la opción **0/0** **División euclidiana**. La asíntota oblicua es y = x - 2

Ejercicio 90

dibujar (x^2 - 3x + 3 / x - 1, {color = rojo, anchura\_linea = 2})

Asíntota vertical:

dibujar (x = 1, {color = verde, anchura\_linea = 2})

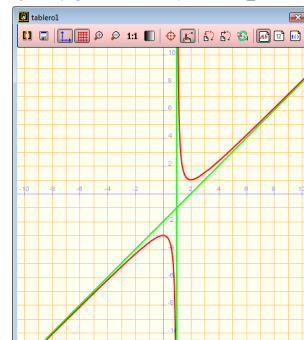
Asíntota horizontal: no tiene

Asíntota oblicua:

$$x^2 - 3x + 3 \quad | \quad x - 1 \quad \rightarrow \quad x^2 - 3 \cdot x + 3 \quad | \quad \begin{matrix} x - 1 \\ \hline 1 \\ x - 2 \end{matrix}$$

La asíntota oblicua es y = x - 2

dibujar (x - 2, {color = verde, anchura\_linea = 2})



2bc07-w89b

91. Representa la siguiente función, halla sus asíntotas oblicuas y represéntalas.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

**Solución:**

**Ejercicio 91**

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$$

dibujar (f(x), {color = rojo, anchura\_linea = 2})

$$m1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$$

$$b1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - m1 \cdot x) \rightarrow 0$$

La asíntota oblicua por la derecha es  $y = x$

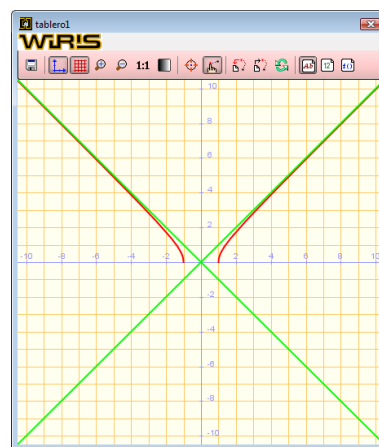
dibujar (y = x, {color = verde, anchura\_linea = 2})

$$m2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow -1$$

$$b2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m2 \cdot x) \rightarrow 0$$

La asíntota oblicua por la izquierda es  $y = -x$

dibujar (y = -x, {color = verde, anchura\_linea = 2})



92. Internet. Abre: [www.editorial-bruno.es](http://www.editorial-bruno.es) y elige Matemáticas, curso y tema.

## Así funciona

### Cálculo de límites

Para hallar un límite en **Análisis** se elige una de las siguientes opciones **lim 0** Límite, **lim 0** Límite derecha, **lim 0** Límite izquierda. Los símbolos **∞** Infinito positivo, **-∞** Infinito negativo, **∞** Infinito sin signo están en **Símbolos**

### Funciones definidas a trozos

Para dibujar una función en un intervalo se escribe la función, una coma y los límites del intervalo separados por dos puntos alineados horizontalmente.

En las gráficas dibujadas con ordenador, de las funciones definidas a trozos, no se aprecia el valor de la función en los puntos extremos de los intervalos. El valor de la función en dichos puntos se debe estudiar en la fórmula.

### División euclidiana

En **Operaciones** se elige **0/0** **División euclidiana** y se escribe el dividendo y el divisor. Tiene aplicación en el cálculo de asíntotas oblicuas en las funciones racionales.

## Practica

Halla los siguientes límites y representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente.

93.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 1)$       94.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

95.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$       96.  $\lim_{x \rightarrow 2} 5^{x-2}$

97.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 + 3x - 1)$

98.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 3x - 1)$

99.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-3x}$       100.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-5}{x-2}$

101.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 - \frac{x^3}{x^2 - 9} \right)$

102.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + \sqrt{x^2 + x} \right)$

103.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-6}-2}{x-2}$       104.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+2}{2x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}$

Representa las siguientes funciones y estudia sus continuidades.

105.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$       106.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

107.  $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

108.  $g(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \mathcal{L}x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

109. Demuestra que la función  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  tiene un cero en el intervalo (2, 3). Representa la función y comprueba que se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano.

Representa las siguientes funciones, halla sus asíntotas y represéntalas:

110.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$       111.  $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$