MATEMATICAS. BC2 TEMA 7: Continuidad

1 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1 $f(x)=\dfrac{5}{x^4-16}$

2 $f(x)=\dfrac{x-7}{x^3-x^2-11x+3}$

3 $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x<2 \\ 2x-1 & si\ x\geq 2 \end{cases}$

4 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x\leq 0 \\ 2x-3 & si\ x>0 \end{cases}$

5 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x<1 \\ \sqrt{x+1} & si\ x\geq 1 \end{cases}$

6 $f(x)-\begin{cases} \dfrac{e^x}{c^x+1} & si\ x\leq 0 \\ x^2+1 & si\ x>0 \end{cases}$

2 Estudia, en el intervalo (0,3), la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ \ 0<x<1 \\ 0 & si\ \ 1\leq x<2 \\ x-1 & si\ \ 2\leq x<3 \end{cases}$$

3 Dada la función:

$$f(x)-\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & Si\ \ x\neq 5 \\ 0 & Si\ \ x-5 \end{cases}$$

1 Demostrar que f(x) no es continua en x = 5.

2 ¿Existe una función continua que coincida con f(x) para todos los $x \neq 5$?

4 Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x)=\frac{x+1}{|x|}$$

5 Estudiar la continuidad de la función f(x) = x · signo(x).

6 Estudiar la continuidad en x = 0 de la función:

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot sen\ \dfrac{1}{x} & Si\ \ x\neq 0 \\ 0 & Si\ \ x=0 \end{cases}$$

7 Calcular el valor de a para que la función siguiente sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ \ x\leq 1 \\ 3-ax^2 & si\ \ x>1 \end{cases}$$

8 Halla el valor de a para que f(x) sea continua en $[0, \infty)$.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{ax} & Si\ \ 0\leq x\leq 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & Si\ \ x>8 \end{cases}$$

9 Si f(2) = 3, calcula a y b para que f(x) sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} \ln\ x & si\ \ 0<x<1 \\ ax^2+b & si\ \ 1\leq x<\infty \end{cases}$$

10 Determinar a y b para que f(x) sea continua para todos los valores de x.

$$f(x)=\begin{cases} sen\ x & Si\ \ x\leq -\frac{\pi}{2} \\ a\cdot sen\, x+b & Si\ \ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ 2\cos\ x & Si\ \ x\geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

11 Hallar ***a*** y ***b*** para que la función sea continua.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ \ x<0 \\ ax+b & si\ \ 0\leq x<1 \\ 2 & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

Ejercicio 1:

1 $f(x)=\dfrac{5}{x^4-16}$ La función es continua en todos los puntos de su dominio. **D = R− {−2,2}**
La función tiene **dos puntos de discontinuidad en x = −2 y x = 2.**

2 $f(x)=\dfrac{x-7}{x^3-x^2-11x+3}$ La función es continua en toda R menos en los valores que se anula el denominador, si igualamos éste a cero y resolvemos la ecuación obtendremos los puntos de discontinuidad.

$x^3-x^2-11x+3=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -11 & 3 \\ -3 & & -3 & 12 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 0 \end{array}$$

x = −3; y resolviendo la ecuación de 2º grado obtenemos también: x=2−√3 y x=2+√3
La función tiene **tres puntos de discontinuidad en x=−3, x=2−√3 y x=2+√3**

3 $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x<2 \\ 2x-1 & si\ x\geq 2\end{cases}$ $f(2)=3$ $\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=3$ $\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-1)=3$
La función es continua en todo $\mathbb{R}$

4 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x\leq 0 \\ 2x-3 & si\ x>0\end{cases}$ $f(0)=-1$ $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1$ $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-3)=-3$
|−1 − (−3)| = 2 La función es **discontinua inevitable de salto 2 en x = 0** .

5 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x<1 \\ \sqrt{x+1} & si\ x\geq 1\end{cases}$ $f(1)=\sqrt{2}$ $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$ $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$
En x = 1 hay una discontinuidad de salto finito.

6 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1} & si\ x\leq 0 \\ x^2+1 & si\ x>0\end{cases}$ $f(0)=\dfrac{1}{3}$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)=\dfrac{1}{3}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2+1=1$
La función es **discontinua inevitable de salto 2/3 en x = 0**.

Ejercicio 2:

Sólo hay duda de la continuidad de la función en los puntos x = 1 y x = 2, en los que cambia la forma de la función.

$f(1)=0$ $\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$ $\lim\limits_{x\to 1^+}0=0$ **En x=1 tiene una discontinuidad de salto 1**

$f(2)=1$ $\lim\limits_{x\to 2^-}0=0$ $\lim\limits_{x\to 2^+}x-1=1$ **En x=2 tiene una discontinuidad de salto 1**

Ejercicio 3:

1 Demostrar que f(x) no es continua en x = 5.

f(5) = 0. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\dfrac{0}{0}$ Resolvemos la indeterminación:

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x+5)(x-5)}{(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}(x+5)=10$ **f(x) no es continua en x = 5** porque $\lim\limits_{x\to 5}f(x)\neq f(5)$

2¿Existe una función continua que coincida con f(x) para todos los valores x ≠ 5? En caso afirmativo dar su expresión.

Si $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = f(5) = 10$ la función sería continua, f(x) redefinida es: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x^2+25} & Si \quad x \neq 5 \\ 10 & Si \quad x = 5 \end{cases}$

Ejercicio 4:

La función f(x) es continua para x≠0. Vamos a estudiar la continuidad en x = 0.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{-x} = \lim_{x\to 0^-} \left(-1 - \frac{1}{x}\right) = -1 - \frac{1}{0^-} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{0^+} = \infty$$

La función **no es continua en x = 0**, porque no está definida en ese punto.

Ejercicio 5:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & Si \quad x < 0 \\ 0 & Si \quad x = 0 \\ 1 & Si \quad x > 0 \end{cases} \qquad x \cdot \operatorname{sgn} x = \begin{cases} x & Si \quad x < 0 \\ 0 & Si \quad x = 0 \\ x & Si \quad x > 0 \end{cases}$$

$f(0) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 6:

La función $sen\,\frac{1}{x}$ está acotada $\left|sen\,\frac{1}{x}\right| \leq 1 \;, x \neq 0$. por tanto se verifica:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot sen\,\frac{1}{x}\right) = 0$, ya que cualquier número multiplicado por cero da cero.

Al ser **f(0) = 0, l**a función es continua.

Ejercicio 7:

$f(1) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+}(3 - ax^2) - 3 - a$ $\quad 3 - a = 2$ $\quad a = 1$

Ejercicio 8:

$\lim\limits_{x\to 8^-} \sqrt{ax} = \sqrt{8a}$ $\quad \lim\limits_{x\to 8^+} \frac{x^2-32}{x-4} = 8$ $\quad \sqrt{8a} = 8$ $\quad a = 8$

Ejercicio 9:

Sólo existe duda de la continuidad en x = 1.

$f(1) = a + b$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} \ln x = \ln 1 = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to -1^+} ax^2 + bx = a + b$

Para que la función sea continua debe cumplirse que:

$a + b = 0$ Por otro lado tenemos que: $f(2) = 3$ $\quad 4a + b = 3$

Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos que: **a = 1 b = −1**

Ejercicio 10:

$f(-\frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} sen\ x = -1$ $\quad \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}(a \cdot sen\,x + b) = -a + b$ $\quad -a + b = -1$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(a \cdot sen\,x + b) = a + b$ $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} 2 \cdot \cos x = 0$ $\quad a + b = 0$ $\quad a = \frac{1}{2}$ $\quad b = -\frac{1}{2}$

Ejercicio 11:

$f(0) = b$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} ax + b = b$ $\quad f(1) = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} ax + b = a + b$

$\lim\limits_{x\to 1^+} 2 = 2$ $\quad a + b = 2$ $\quad a = 2$ $\quad b = 0$