VIII. Modelo de examen.

A continuación, se proporciona un modelo de examen con el objetivo de que sirva como ejemplo de la estructura del examen. El tipo de preguntas podrá variar de acuerdo con los contenidos de la asignatura.

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2023/2024

Materia: MATEMÁTICAS II

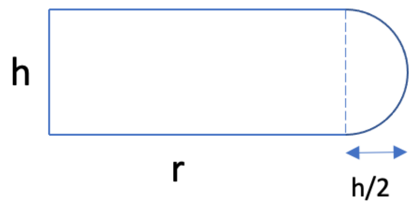
Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Sólo se podrán utilizar calculadoras no programables y sin capacidad gráfica (tipos 1 y 2). Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. En una joyería hay 120 piezas de El Señor de los Anillos entre Anillos Únicos, Broches Hoja y Colgantes de Arwen. Sabemos que hay 20 Anillos menos que la suma de los Broches y los Colgantes. También sabemos que los Anillos y los Colgantes suman lo mismo que el número de Broches multiplicado por un número indeterminado ($t \in \mathbb{R}$).

   a) **[1,75 puntos]** Plantea el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema y estudia las soluciones dependiendo de los valores de t.

   b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $t = 4$, si es posible.

2. Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



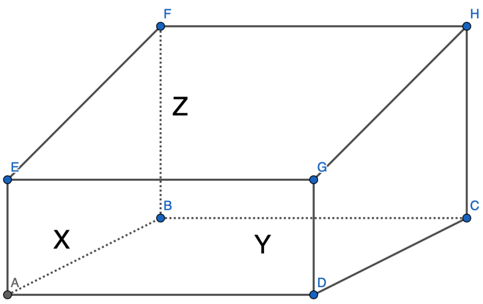
   a) **[1 punto]** Escribe el área del aparcamiento en función del valor h.

   b) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer h y r para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

3. Para transportar a su mascota, Frank ha fabricado una caja, según se puede ver en la figura de la derecha. La parte de arriba de la caja viene definida por los puntos $E(3,0,2)$, $F(0,0,4)$, $G(3,a,b)$ y $H(0,6,4)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

   a) **[1,5 puntos]** ¿Qué deben cumplir los valores a y b para que la parte de arriba de la caja forme un plano?

   b) **[1 punto]** Suponiendo que la parte de arriba de la caja es un plano, determina los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los que los lados EG y GH formen un ángulo de 90º y E y G sean distintos.



4. *a*) **[1 punto]** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ e^{x-a} & x \geq 1 \end{cases},$$

   con $a \in \mathbb{R}$. Estudia la continuidad de $f(x)$ e indica de qué tipo son sus discontinuidades (si las hubiera) para los distintos valores del parámetro a.

b) **[1,5 puntos]** Sean los planos $\pi_1 \equiv -x + y + 2z = 1$, $\pi_2 \equiv 2y + z = -1$. Determina la ecuación del plano perpendicular a los planos π_1 y π_2 y que pasa por el punto $A(0, 1, 1)$.

5. a) En el primer curso de un grado en ingeniería industrial los alumnos deben cursar una asignatura de estadística y otra de física. Se sabe que la probabilidad de que un alumno apruebe estadística es del 60 % mientras que la probabilidad de que apruebe física es del 50 %. Además, se sabe que la probabilidad de que aprueben las dos es del 40 %.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe estadística o física?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si un alumno ha aprobado física, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado estadística?

   b) En el huerto urbano ”Turdus merula” producen compost para abonar los cultivos. Han observado que la cantidad de compost que se produce cada temporada sigue una distribución normal de media 40 kg y varianza 4 kg^2.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una temporada se produzcan más de 43 kg de compost?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la cantidad exacta de compost que es menor que el 79.95 % más grande de las cantidades de compost producidas en otras temporadas?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441

6. a) **[1 punto]** Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2} - (1-3x)^{2/3}}.$$

   Puedes utilizar el cambio de variable $1 - 3x = t^6$.

   b) **[1,5 puntos]** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

7. a) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x} dx.$$

   b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

   b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in \mathbb{N}$?

8. a) **[1,25 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz A es invertible.

   b) **[1,25 puntos]** Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2z = 1$, $\pi_2 \equiv b \cdot y + z = -1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Qué condición deben cumplir a, b para que los planos no sean perpendiculares?