Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +2y & +az & = & a \\ x & +ay & +2z & = & a \\ -x & +y & +z & = & 1 \end{cases}.$$

   b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

3. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)} \right)$.

   b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si} \quad x \le 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases},$$

   donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

4. *a*) **[1,5 puntos]** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

5. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-dx}{1+e^x}$.

   (Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

   b) **[1,25 puntos]** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y - 2 & = & 0 \\ y - z - 2 & = & 0 \end{array} \right.$.

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

7. Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$, $\quad s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

   a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

   b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

8. *a*) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluídos)?

   b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

Evaluación para Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

SOLUCIÓN Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Materia: MATEMÁTICAS II

1a) **[1 punto]** La inversa de A calculada por el método elegido es $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

Explicación del método o fórmula de la matriz adjunta: 0,25 *puntos. Cálculo del determinante y de la matriz adjunta o proceso del Método de Gauss:* 0,5 *puntos. Resultado final correcto:* 0,25 *puntos.*

1b) **[1,5 puntos]** $AX + I_3 = BC \Longrightarrow X = (A)^{-1}(BC - I_3)$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Planteamiento razonado del problema: $0,5$ *puntos. Multiplicación de las matrices BC:* 0,25 *puntos. Cálculo de $BC - I_3$:* 0,25. *Multiplicación de las matrices $(A)^{-1}(BC - I_3)$:* 0,25 *puntos. Resultado final correcto:* $0,25$ *puntos.*

2a) **[1,75 puntos]** Considerando la matriz de coeficientes del sistema, A, y la ampliada, A^*, el determinante $|A| = a^2 + 2a - 8 = 0 \Longrightarrow a = -4, a = 2$

Si $\boxed{a \neq -4 \text{ y } a \neq 2,\ Rango(A) = Rango(A^*) = 3, \text{ sistema compatible determinado.}}$

Si $\boxed{a = -4,\ Rango(A) = 2,\ Rango(A^*) = 3, \text{ sistema incompatible.}}$

Si $\boxed{a = 2,\ Rango(A) = 2\ Rango(A^*) = 2, \text{ sistema compatible indeterminado.}}$

Cálculo de $|A|$: 0,75 *puntos. Valor de los parámetros donde se anula $|A|$:* 0,25 *puntos. Discusión razonada del caso en que a es distinto de los valores en los que se anula el determinante de A:* 0,25 *puntos. Discusión razonada en caso $a = -4$:* 0,25 *puntos. Discusión razonada en caso $a = 2$:* 0,25 *puntos.*

2b) **[0,75 puntos]** Si $a = 2$, $Rango(A) = Rango(A^*) = 2 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado. La solución es $\boxed{x = 0,\ y = 1 - \lambda \text{ y } z = \lambda.}$

Planteamiento y proceso de resolución: 0,5 *puntos. Solución correcta:* 0,25 *puntos.*

3a) **[1 punto]** $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)} \right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x) - x}{x \operatorname{sen}(2x)} \right) = \dfrac{0}{0}$, indeterminación. Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(2x) - x}{x \operatorname{sen}(2x)} \right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2\cos(2x) - 1}{\operatorname{sen}(2x) + 2x\cos(2x)} \right) = \frac{1}{0} = \infty.$$

Detectar indeterminación 0,25 *puntos. Plantear y ejecutar estrategia de resolución* 0,5 *puntos. Resultado final correcto:* 0,25 *puntos.*

3b) **[1,5 puntos]** Dada $f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$ es continua en un punto si el valor de la función en el punto y los límites laterales coinciden.

$\boxed{\text{En } x = 1:}$ $f(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1-2 = -1$, $\boxed{\text{es discontinua de salto finito}}$.

$\boxed{\text{En } x = 2:}$ $f(2) = \ln(1) = 0$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2-2 = 0$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \ln(2-1) = \ln(1) = 0$. $\boxed{\text{es continua}}$.

Explicar las condiciones generales de continuidad en un punto: 0,5 *puntos. Analizar continuidad en $x = 1$:* 0,25 *puntos. Clasificar el tipo de discontinuidad en el mismo:* 0,25 *puntos. Analizar continuidad en $x = 2$:* 0,25 *puntos. Clasificar el tipo de discontinuidad en el mismo:* 0,25 *puntos.*

4a) **[1,5 puntos]** Hay que hallar la superficie mínima, S, de un prisma de base cuadrada de lado x y altura y cuyo volumen es 108 dm^3. La superficie a minimizar es $S(x, y) = x^2 + 4xy$.

Teniendo en cuenta el volumen $V = x^2y = 108$, se tiene que $y = \dfrac{108}{x^2}$, que al sustituir en S resulta $S(x) = x^2 + 4x\dfrac{108}{x^2} = x^2 + \dfrac{432}{x}$.

Derivando e igualando a 0, $S'(x) = 2x - \dfrac{432}{x^2} = 0 \Longrightarrow \dfrac{2x^3 - 432}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 6$ (el resto son raíces complejas). Como $S''(x) = \dfrac{864}{x^3} + 2$, sustituyendo, $S''(6) = \dfrac{864}{6^3} + 2 > 0$ significa que $S(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 6$ e $y = \dfrac{108}{6^2} = 3$. Por lo tanto, $\boxed{\text{las dimensiones de la caja buscada son } x = 6\ dm,\ y = 3\ dm.}$

Definir la función a minimizar: 0,5 puntos. Hallar la derivada: 0,25 *puntos. Obtener le punto crítico:* 0,25 *puntos. Demostrar que es un mínimo* 0,25 *puntos. Dar la solución (el valor de x e y completos):* 0,25 *puntos.*

4b) **[1 punto]** La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en un punto $x = x_0$ es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Dada $f(x) = x^2 + x - 1$, y el punto $x_0 = 1$, se tiene que $f(1) = 1$, y calculando la derivada y evaluando en el punto, $f'(x) = 2x + 1 \Longrightarrow f'(1) = 3$, luego la pendiente de la recta tangente es 3 y la solución $y - 1 = 3(x - 1) \Longrightarrow \boxed{y = 3x - 2.}$

Escribir ecuación de la recta tangente: 0,25 *puntos. Cálculo del punto de tangencia:* 0,25 *puntos. Cálculo de la pendiente:* 0,25 *puntos. Obtención de la expresión de la recta tangente:* 0,25 *puntos.*

5a) **[1,25 puntos]** Tomando $e^x = t$, entonces, $e^x dx = dt \Longrightarrow dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t}$, y sustituyendo en la integral

$$\int \frac{-1}{1+e^x}\, dx = \int \frac{-1}{t(1+t)}\, dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}\right) dt = \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = -\ln(t) + \ln(1+t) =$$
$$\ln\left(\frac{1+t}{t}\right) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \boxed{\ln(1+e^x) - x + C.}$$

Realizar correctamente el cambio de variable y obtener la integral racional: 0,5 *puntos. Hacer la descomposición en fracciones elementales y obtener los coeficientes:* 0,25 *puntos. Resolver las integrales logarítmicas inmediatas:* 0,25 *puntos. Deshacer el cambio y dar la solución correcta:* 0,25 *puntos.*

5b) **[1,25 puntos]** Considerando $h(x) = f(x) - g(x) = (-x^2 + 2x + 4) - (x + 2) = -x^2 + x + 2$, los puntos de corte con el eje de abscisas son $h(x) = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 2$. Se comprueba que $f(x) \geq g(x)$ en $x \in [-1, 2]$, luego el área es $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \boxed{\frac{9}{2} \text{ unidades}^2}$.

Cálculo de los cortes con el eje de abscisas: 0,25 *puntos. Planteamiento del recinto y su correspondiente integral correctamente: 0,25 puntos. Resolución de la integral polinómica:* 0,25 *puntos. Aplicación de la regla de Barrow correctamente:* 0,25 *puntos. Obtención del resultado final:* 0,25 *puntos.*

6a) **[1 punto]** Dado el plano $\pi \equiv x+2y-z-4=0$ y la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{lll} x-2y-2 & = & 0 \\ y-z-2 & = & 0 \end{array}\right.$, la distancia del punto $P(1,2,-1)$ al plano es $d(P,\pi) = \dfrac{|1+2\cdot 2-(-1)-4|}{\sqrt{1+2^2+(-1)^2}} = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt{6}}.}$

Fórmula escrita correctamente: $0,5$ *puntos. Resultado final correcto:* 0,5 *puntos*

6b) **[1,5 puntos]** El punto intersección de la recta r y el plano π es $A(2,0,-2)$. El área del triángulo formado por los puntos A, $B(1,-1,2)$ y $C(0,1,1)$ se puede calcular usando el producto vectorial (de 3 posibles formas): $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\|$, donde $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,4)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,1,3)$ y $\overrightarrow{CB}=(1,-2,1)$, luego $A = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\|-7\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}\| = \frac{1}{2}\sqrt{49+25+5} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{83} = 4{,}555 \text{ unidades}^2.}$

Explicación del problema y fórmula correcta del área del triángulo: 0,5 *puntos. Obtención del punto A de corte de la recta y el plano:* 0,25 *puntos. Obtención de los vectores que determinan el paralelogramo:* 0,25 *puntos. Realización del producto vectorial de los vectores:* 0,25 *puntos. Obtención del resultado final:* 0,25 *puntos.*

7a) **[1,25 puntos]** Dadas las rectas $r \equiv \left\{\begin{array}{lll} 2x-2y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$ definida por el punto $R(2,0,0)$ y el vector director $\vec{v_r}=(1,1,0)$ y $s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$, definida por el punto $S(0,-2,1)$ y el vector director $\vec{v_s}=(3,-2,1)$, se tiene que sus vectores directores son independientes y $Determinante(\overrightarrow{RS},\vec{v_r},\vec{v_s}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, por lo que se concluye que las rectas se cruzan.

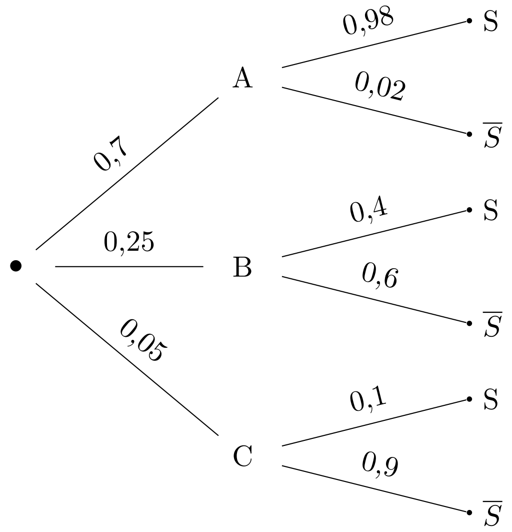
Explicación y planteamiento del problema: 0,5 *puntos. Obtención de los elementos de las rectas, puntos y vectores directores:* 0,5 *puntos. Cálculo del determinante y conclusión:* 0,25 *puntos.*

7b) **[1,25 puntos]** El vector normal al plano paralelo a las rectas r y s es el productos vectorial de los vectores directores de ambas rectas:

$\vec{n} = \vec{v_r}\times\vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}. \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$. Por lo tanto, el plano buscado es $x-y-5z+D=0$ que como pasa por $P(-1,0,2) \Longrightarrow -1+0-10+D=0 \Longrightarrow D=11 \Longrightarrow \boxed{x-y-5z+11=0.}$

Planteamiento del problema: 0,5 puntos. Obtención del vector normal: 0,5 puntos. Obtención de la ecuación del plano pedido: 0,25 puntos.

8a) La probabilidad de que un usuario de instagram pertenezca al grupo A=“Menores de 34 años” es 0,7, de que pertenezca al grupo B= “Entre 34 y 54 incluídos” es 0,25 y de que peretenezca al C= “Mayores de 54” es 0,05. Las probabilidades de que usuarios de los grupos A, B y C accedan a diario a la red, S= “Sí Accede”, son 0,98, 0,4 y 0,1 , respectivamente, y de no acceder, $\overline{S}$, las complementarias.



a.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de que un usuario seleccionado al azar no acceda a dirario aplicando el teorema de la probabilidad total es: $P(\overline{S}) = 0{,}7 * 0{,}02 + 0{,}25 * 0{,}6 + 0{,}05 * 0{,}9 = \boxed{0{,}209}$.
Explicación y planteamiento: 0,25 *puntos. Resultado correcto:* 0,25 *puntos.*

a.2) **[0,75 puntos]** La probabilidad de que un usuario que sí accede a diario pertenezca al grupo B, por el Teorema de Bayes o el diagrama:
$$P(B/S) = \frac{P(S/B)P(B)}{1 - P(\overline{S})} = \frac{0{,}4 * 0{,}25}{0{,}791} = \boxed{0{,}1264}.$$
Explicación y planteamiento: 0,25 *puntos. Cálculo de probabilidades auxiliares:* 0,25 *puntos. Resultado correcto:* 0,25 *puntos.*

8b) b.1) **[0,5 puntos]** El tiempo conectado X es una variable aleatoria normal de media $\mu = 53$ y desviación típica $\sigma = 10$. Luego $P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - P\left(Z \leq \frac{30 - 53}{10}\right) =$
$1 - P(Z \leq -2{,}3) = 1 - (1 - P(Z \leq 2{,}3)) = P(Z \leq 2{,}3) = \boxed{0{,}9893}$.
Definición de la variable, planteamiento del problema y tipificación: 0,25 *puntos. Resolución:* 0,25 *puntos.*

b.2) **[0,75 puntos]** La probabilidad de que se conecten entre 40 y 67 minutos al día es $P(40 \leq X \leq 67) = P\left(\frac{40 - 53}{10} \leq Z \leq \frac{67 - 53}{10}\right) = P(Z \leq 1{,}4) - P(Z \leq -1{,}3) = P(Z \leq 1{,}4) - (1 - P(Z \leq 1{,}3)) = 0{,}9192 - (1 - 0{,}9032) = 0{,}8224$. Se conectan el $\boxed{82{,}24\,\%}$.
Planteamiento del problema: 0,25 puntos. Tipificación y obtención de la probabilidad: 0,25 puntos. Obtención del porcentaje: 0,25 puntos.