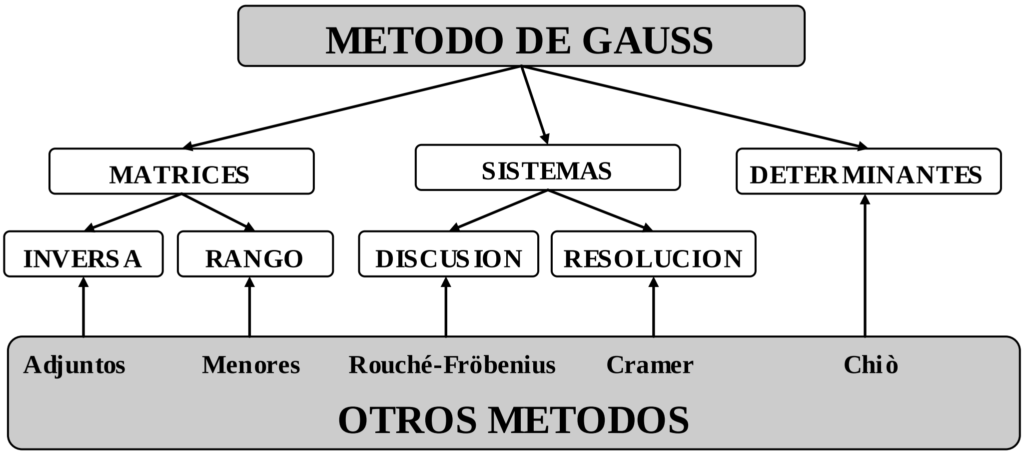
ALGEBRA DE MATRICES



Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a+1 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**,** $B = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ **y** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$**. Calcular:**

1.- El determinante de la matriz A|B:
- a) Por el método de Gauss
- b) Por el método de Chiò

2.- El rango de la matriz A:
- a) Por el método de Gauss
- b) Usando menores

3.- La inversa de la matriz $A'(a=1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- a) Por el método de Gauss
- b) Usando adjuntos

4.- Discutir el sistema A X = B según los valores del parámetro a
- a) Por el método de Gauss
- b) Por el teorema de Rouche-Fröbenius

5.- Resolver el sistema A X = B en los casos compatibles
- a) Por el método de Gauss
- b) Por la regla de Cramer
- c) Despejando previamente X (para a = –1)

1.- El determinante de la matriz A|B:

a) Por el método de Gauss

$$\det(A\,|\,B)=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1 & 1\\ 1 & a+1 & 2a+1 & a+1\\ 1 & -1 & 1 & a\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1 & 1\\ 0 & a & a & a\\ 0 & -2 & -a & a-1\\ 0 & 0 & -a & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1 & 1\\ 0 & a & a & a\\ 0 & 0 & -a^2+2a & a^2+a\\ 0 & 0 & -a & 0\end{pmatrix}=$$

NFi=Fi-F1 (i=2,3,4) NF3=aF3+2F2 **(a≠0)** NC3=C4; NC4=C3

$$=\frac{-1}{a}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a+1\\ 0 & a & a & a\\ 0 & 0 & a^2+a & -a^2+2a\\ 0 & 0 & 0 & -a\end{pmatrix}=\frac{-1}{a}\cdot\left[1\cdot a\cdot\left(a^2+a\right)\cdot(-a)\right]=\boxed{a^2\cdot(a+1)}$$

$$Si\ \ a=0\Rightarrow\det\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1 & 1\\ 1 & a+1 & 2a+1 & a+1\\ 1 & -1 & 1 & a\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=0$$

b) Por el método de Chiò

$$\det(A\,|\,B)=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1 & 1\\ 1 & a+1 & 2a+1 & a+1\\ 1 & -1 & 1 & a\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1 & 1\\ 0 & a & a & a\\ 0 & -2 & -a & a-1\\ 0 & 0 & -a & 0\end{pmatrix}=1\cdot\det\begin{pmatrix}a & a & a\\ -2 & -a & a-1\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)\cdot(-a)\cdot\det\begin{pmatrix}a & a\\ -2 & a-1\end{pmatrix}=1\cdot(-1)\cdot(-a)\cdot[a\cdot(a-1)-(-2)\cdot a]=\boxed{a^2\cdot(a+1)}$$

2.- El rango de la matriz A:

a) Por el método de Gauss

$$ran(A)=ran\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1\\ 1 & a+1 & 2a+1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\ldots=ran\begin{pmatrix}1 & a+1 & 1\\ 0 & a & a\\ 0 & 0 & a-2\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{Si\ \ a=0\ \ \Rightarrow ran\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2}\ \boxed{Si\ \ a\neq 0\ \ \Rightarrow ran(A)=3}$$

b) Usando menores

$$ran(A)=ran\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1\\ 1 & a+1 & 2a+1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=2a\Rightarrow\boxed{Si\ \ a=0\ \ \Rightarrow ran\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=2}$$ (F2 no aporta rango)

$$\boxed{Si\ \ a\neq 0\ \ \Rightarrow ran(A)=3}$$

3.- La inversa de la matriz $A'(a=1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

a) Por el método de Gauss

(Operaciones elementales con filas y columnas, incluyendo permutación de filas, pero no se permite la permutación de columnas)

$$\left(A'|\,I\right)=\left(\begin{matrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right)\rightarrow\left(\begin{matrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{matrix}\right)\rightarrow\left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}5 & -3 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 1\end{matrix}\right)\Rightarrow\boxed{A'^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -3 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}}$$

b) Usando adjuntos

$$A'^{-1}=\frac{[Adj(A')]^t}{|A'|}\Rightarrow A'^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=1\cdot\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ -3 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}^t\Rightarrow\boxed{A'^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -3 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}}$$

4.- Discutir el sistema A X = B según los valores del parámetro a

a) Por el método de Gauss

$$\begin{array}{c}\begin{matrix}(x) & (y) & (z)\end{matrix}\\ \left(\begin{matrix}1 & 1 & a+1\\ 1 & a+1 & 2a+1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}1\\ a+1\\ a\\ 1\end{matrix}\right)\end{array}\rightarrow\left(\begin{matrix}1 & 1 & a+1\\ 0 & a & a\\ 0 & -2 & -a\\ 0 & 0 & -a\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}1\\ a\\ a-1\\ 0\end{matrix}\right)\rightarrow\left(\begin{matrix}1 & 1 & a+1\\ 0 & a & a\\ 0 & a-2 & 0\\ 0 & 0 & -a\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}1\\ a\\ 2a-1\\ 0\end{matrix}\right)\rightarrow\begin{array}{c}\begin{matrix}(x) & (z) & (y)\end{matrix}\\ \left(\begin{matrix}1 & a+1 & 1\\ 0 & a & a\\ 0 & 0 & a-2\\ 0 & -a & 0\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}1\\ a\\ 2a-1\\ 0\end{matrix}\right)\end{array}\rightarrow\left(\begin{matrix}1 & a+1 & 1\\ 0 & a & a\\ 0 & 0 & a-2\\ 0 & 0 & a\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}1\\ a\\ 2a-1\\ a\end{matrix}\right)\rightarrow$$

$$\boxed{Si\ \ a=0\Rightarrow\left(\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}1\\ 0\\ -1\\ 0\end{matrix}\right)\rightarrow SCI}\quad Si\ \ a=2\Rightarrow\left(\begin{matrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}1\\ 2\\ 3\\ 0\end{matrix}\right)\rightarrow SI\quad\boxed{z=\frac{2a-1}{a-2}=1\Rightarrow a=-1;\ \ si\ \ a=-1\Rightarrow\left(\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & -1\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}1\\ -1\\ -3\\ -1\end{matrix}\right)\rightarrow SCD}$$

$$\boxed{Si\ \ a\neq 0,-1\ \ \Rightarrow 3=ran(A)\neq ran(A\,|\,B)=4\Rightarrow SI}$$

b) Por el teorema de Rouché-Fröbenius

RANGO DE A: $ran(A)=ran\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1\\ 1 & a+1 & 2a+1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\begin{pmatrix}1 & 1 & a+1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=2a\Rightarrow$ (F2 no aporta rango)

$$Si\ \ a=0\ \ \Rightarrow ran(A)=ran\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=2\ \ y\ \ ran(A\,|\,B)=ran\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=2\Rightarrow SCI;\ \ si\ \ a\neq 0\Rightarrow ran(A)=3$$

RANGO DE A|B: $ran(A|B) = ran\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a+1 & 2a+1 & a+1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & a+1 & 2a+1 & a+1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a^2 \cdot (a+1)$

$Si\ \ a = -1 \ \Rightarrow ran(A) = 3\ \ y\ \ ran(A|B) = 3 \Rightarrow SCD;\ \ si\ \ a \neq -1 \Rightarrow ran(A|B) = 4$

$$\boxed{\begin{array}{l} Si\ \ a = 0\ \ \Rightarrow ran(A) = ran(A|B) = 2 < 3 = n^{o}\ \ incognitas \Rightarrow SCI \\ Si\ \ a = -1\ \ \Rightarrow ran(A) = ran(A|B) = 3 = n^{o}\ \ incognitas \Rightarrow SCD \\ Si\ \ a \neq 0,-1\ \ \Rightarrow 3 = ran(A) \neq ran(A|B) = 4 \Rightarrow SI \end{array}}$$

5.- Resolver el sistema A X = B en los casos compatibles

a) Por el método de Gauss

$$Si\ \ a = 0 \Rightarrow \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to SCI \Rightarrow \begin{cases} x + z + y = 1 \\ -2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{1-2t}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} & \forall t \in \Re \\ z = t \end{cases}}$$

$$Si\ \ a = -1 \Rightarrow \begin{array}{ccc} (x) & (z) & (y) \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \to SCD \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ -z - y = -1 \\ -3y = -3 \\ -y = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}}$$

a) Por la regla de Cramer

$$Si\ \ a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + z + y = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 - t \\ x - y = -t \\ z = t\ \ \forall t \in \Re \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -t & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1+2t}{-2}; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1 & -t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{1-2t}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} & \forall t \in \Re \\ z = t \end{cases}}$$

$$Si\ \ a = -1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \\ x - y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} ; A|B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \det(A) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; y = \frac{1}{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; z = \frac{1}{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}}$$

a) Despejando previamente X (para a = -1)

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}}$$