~~1ª~~ 2ª Evaluación
BC2
Examen E3

Examen Matemáticas –TEMA 7, 8, 11 y 12. Continuidad e Integrales

NOMBRE:

NOTA

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 1*

a) Enuncia los Teoremas de Bolzano y de Rolle. (1 punto)

b) Razona que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real. (0,75 puntos)

c) Razona que, de hecho, dicha solución es única. (0,75 puntos)

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 2*

Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \ln(x+1)}{2 - 2\cos x}$ (1,25 puntos por límite)

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 3*

Calcula la integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\, dx \qquad \text{(2,5 puntos)}$$

Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes.

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 4*

a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 11$. (1,5 puntos)

b) Representa el recinto del apartado anterior (1 punto)

SOLUCIONES Máxima puntuación = 40 ptos.

4 (1) a) Ver teoría (2) + (2) | b) Sea $f(x) = 2e^{x} + x^{5}$, continua en $[-1, 0]$ con $\text{sign} f(-1) \neq \text{sign} f(0)$, se puede

3 aplicar entonces el teorema de Bolzano, por lo que $\exists c \in (-1,0) / f(c) = 0$ y por tanto $2e^{x} + x^{5} = 0$

3 c) Para que hubiera más soluciones $f'(x) = 0$, cosa que no ocurre ya que $2e^{x} + 5x^{4} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

5 (2) a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L'Hop}{=} \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2+6x}{3x^2+10x+8} \overset{L'Hop}{=} \dots = \dfrac{-6}{-2} = \boxed{3}$

5 b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \ln(x+1)}{2-2\cos x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{L'Hop}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}}{2\operatorname{sen} x} \overset{L'Hop}{=} \dots = \boxed{1}$

10 (3) $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array} \left\{\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right.\right] = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{2}\, 2t\,dt =$

$\displaystyle = \int_0^{\pi/2} t \cos t\,dt = \left[\begin{array}{l} u=t,\ du=dt \\ dv=\cos t\,dt,\ v=\operatorname{sen} t \end{array}\right] = t \operatorname{sen} t \Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\,dt =$

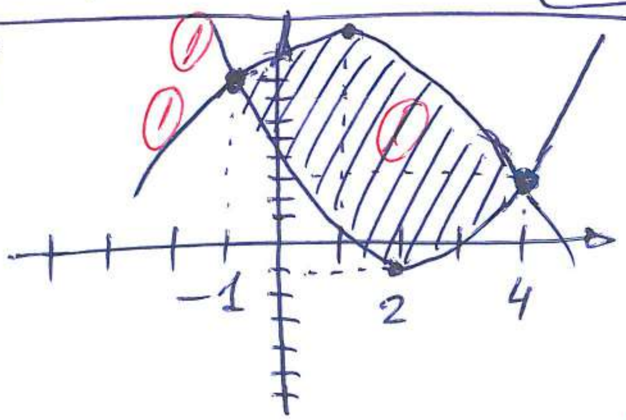
$\displaystyle = \frac{\pi}{2} \cancel{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} - 0 - \Big(-\cos t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \cancel{\cos\frac{\pi}{2}} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1 = \boxed{\frac{\pi-2}{2}}$

4 (4) b)

x	$x_v = \frac{4}{2} = 2$	4	-1
$y = x^2 - 4x + 3$	-1	3	8

x	$x_v = \frac{-2}{-2} = 1$	4	-1
$y = -x^2 + 2x + 11$	12	3	8

$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 11 \Rightarrow x = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$



6 a) $\displaystyle \text{Area} = \int_{-1}^{4} \left[-x^2 + 2x + 11 - (x^2 - 4x + 3)\right] dx = \int_{-1}^{4} (-2x^2 + 6x + 8)\,dx = \dots = \boxed{\frac{125}{3}}$

2ª Evaluación
BC2
Examen E4

Examen Matemáticas –TEMA 1, 9 y 10. Derivabilidad y Matrices

NOMBRE:

NOTA

(2 ptos.) ***EJERCICIO 1***

Determina los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$ y además pase por el punto $(1, -1/e)$. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

(2 ptos.) ***EJERCICIO 2***

Encuentra el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente sea mínima.

(2 ptos.) ***EJERCICIO 3***

a) Sean A, B y X matrices cuadradas de tamaño n. Despeja X de la ecuación $X \cdot A = 2X + B^2$.

b) Calcula la matriz X siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(2 ptos.) ***EJERCICIO 4***

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Estudia, en función del parámetro λ, el rango de $A \cdot B$.

b) Razona que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, y calcula dicha matriz inversa.

(2 ptos.) ***EJERCICIO 5***

Los alumnos de 2º Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.

a) Presente en una matriz *M*, de dimensión 3x2, las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de un pastel grande y uno pequeño.

b) Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escriba las dos matrices columna, *A* (20 grandes y 30 pequeños) y *B* (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.

c) Calcule los productos *M·A* y *M·B* e indique si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar y 5 Kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?.

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 30 ptos.

6 **1** $f(x)=(ax^2+bx)\cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x)=[-ax^2+(2a-b)x+b]e^{-x}$

a) $f'(3)=0 \Rightarrow -3a-2b=0$ (1) ; $f(1)=\frac{-1}{e} \Rightarrow a+b=-1$ (1)   (1) $a=2$ (1) $b=-3$

b) $RT \equiv \begin{cases} P=(0,0) \\ m=f'(0)=b=-3 \end{cases}$ (1) $\Rightarrow \boxed{y=-3x}$ (1)

6 **2** $f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow m(x)=f'(x)=3x^2+2x+1 \Rightarrow m'(x)=6x+2$ (1) (1)

$m'(x)=0 \Rightarrow 6x+2=0 \Rightarrow x=-2/6=-1/3$ (1) ; $m''(x=-1/3)=6>0$ (1)

$x=-1/3 \Rightarrow f(-1/3)=20/27$ (1) $\Rightarrow \boxed{P=(-1/3,\ 20/27)}$ (1) mínimo

6 **3** a) $XA-2X=B^2$ (1) ; $X\cdot(A-2\mathbb{I})=B^2$ (1) ; $\boxed{X=B^2(A-2\mathbb{I})^{-1}}$ (1)

b) $B^2=\begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ (1) ; $(A-2\mathbb{I})^{-1}=\begin{pmatrix} -3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ (1) ; $\boxed{X=\begin{pmatrix} -6 & -12 & -2 \\ 0 & -16 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}}$ (1)

6 **4** a) $rg(A\cdot B)=rg\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1) $=rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1) $=2$ (1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) $B\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda+1 & -\lambda \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ (1) ; $(BA|\mathbb{I})=\dots=(\mathbb{I}|(BA)^{-1})$ (1) $\Rightarrow \boxed{(BA)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\lambda/3 \\ 1 & \frac{-(\lambda+1)}{3} \end{pmatrix}}$ (1)

6 **5** a) $M=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 100 & 80 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (Hv) \\ (Az) \\ (Ha) \end{array} \\ (G)\ \ (P) & \end{array}$ (1)

b) $A=\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}\begin{array}{c} (G) \\ (P) \end{array}$; $B=\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}\begin{array}{c} (G) \\ (P) \end{array}$ (1)

c) $M\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 100 & 80 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 70 \\ 190 \\ 4400 \end{pmatrix}\begin{array}{c} (Hv) \\ (Az) \\ (Ha) \end{array}$ (1) $\Rightarrow$ **Se puede** (1)

$M\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 100 & 80 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 80 \\ 210 \\ 4600 \end{pmatrix}\begin{array}{c} (Hv) \\ (Az) \\ (Ha) \end{array}$ (1) $\Rightarrow$ **No se puede** (1)

Material disponible $=\begin{pmatrix} 96 \\ 200 \\ 5000 \end{pmatrix}\begin{array}{c} (Hv) \\ (Az) \\ (Ha) \end{array}$

Recuperación
2ª Evaluación
BC2

Examen Matemáticas – Continuidad, Derivabilidad y Álgebra

NOMBRE:

NOTA

(2 ptos.) *EJERCICIO 1*

Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza el teorema para demostrar que la función

$$f(x) = \frac{2e^x - 8x - 3}{x + 2}$$

corta al eje de abscisas al menos una vez.

(2 ptos.) *EJERCICIO 2*

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3 \ln(x)}{1 + x^3}.$$

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}.$$

(3 ptos.) *EJERCICIO 3*

a) Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{e^x}$,

b) Calcule sus asíntotas.

(3 ptos.) *EJERCICIO 4*

[1,5 puntos] Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) **[1,5 puntos]** Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

donde $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula el determinante de

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z+3 \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

SOLUCIONES Máxima puntuación = 40 ptos.

8 ① a) Ver Teoría (2)

b) $f(x) = \dfrac{2e^{x} - 8x - 3}{x+2}$ es continua en el intervalo $[0,3]$, con $\text{sign} f(0) \neq \text{sign} f(3) \Rightarrow$ de acuerdo con el teorema de Bolzano $\exists c \in (0,3)$ tal que $f(c) = 0$

4 ② a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3\ln(x)}{1+x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hop}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3/x}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = \boxed{0}$

4 b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \left(1^{\infty}\right) = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x}\cdot\left(\frac{x+1}{x}-1\right)\right]} =$

$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2}} = e^1 = \boxed{e}$

③ $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{e^x}$; $f'(x) = \dfrac{-x^2+2}{e^x}$; $f''(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{e^x}$

6 a) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ $\begin{cases} f''(+\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow \boxed{x = +\sqrt{2} \text{ es Max}} \\ f''(-\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow \boxed{x = -\sqrt{2} \text{ es min}} \end{cases}$

6 b) A.H.: $y = \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x}{e^x} = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ \infty \end{matrix} \right.$ $\boxed{y = 0 \text{ es A.H en } +\infty}$

A.V.: $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / e^x \neq 0\} = \mathbb{R} \Rightarrow$ $\boxed{\text{No hay A.V.}}$

A.O.: $y = mx + n$; $m = \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{e^x} = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ \infty \end{matrix} \right.$ $\boxed{\text{No hay A.O.}}$

6 ④ a) $\det\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} = a(a+2)$; $\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } a = 0 \Rightarrow rg(A) = 2 \\ \text{Si } a = -2 \Rightarrow rg(A) = 2 \\ \text{Si } a \neq 0, -2 \Rightarrow rg(A) = 3 \end{array}}$

6 b) $\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z+3 \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$

$= 2\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 2\cdot(-1) + 0 = \boxed{-2}$

BC2
2ª Evaluación

Examen Matemáticas –TEMAS 1, 9, 10 y 12. Cálculo y Álgebra
NOMBRE:

(2 ptos.) *EJERCICIO 1*

Calcula los máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$$

(1 pto.) *EXTRA:* Realiza su representación gráfica aproximada

(2 ptos.) *EJERCICIO 2*

Descompón el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo neperiano del otro sea máxima.

(3 ptos.) *EJERCICIO 3*

Determina el área del recinto plano limitado por el eje OX, las rectas verticales x = –2 y x = 2 y la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$

(3 ptos.) *EJERCICIO 4*

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) La matriz inversa de A
b) La matriz traspuesta de A
c) El resultado de la operación $A^t - 3B$
d) Despeja X de la ecuación $AX + 3B = A^t$
e) Calcula la matriz X utilizando los resultados anteriores

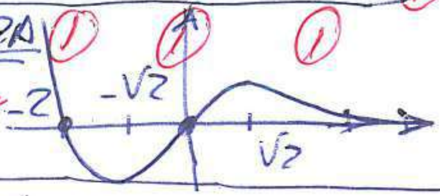
SOLUCIONES Máxima puntuación = 30 ptos.

1) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{e^x}$; $f'(x) = \dfrac{-x^2+2}{e^x}$; $f''(x) = \dfrac{x^2-2x-2}{e^x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$; $f''(\pm\sqrt{2}) \lessgtr 0 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \text{ es Máximo} \\ x=-\sqrt{2} \text{ es mínimo} \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ crece } \forall x \,(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ f(x) \text{ decrece } \forall x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty) \end{array}}$

EXTRA



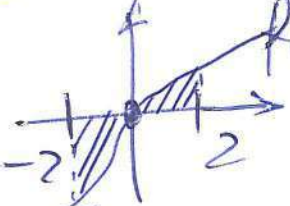
2) $x + y = 10$ (Restricción) $\longrightarrow x = 10 - y$

$f(x,y) = x + 2\ln y$ (máxima) $\Rightarrow f(y) = 10 - y + 2\ln y \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(y) = -1 + \dfrac{2}{y} = 0 \Rightarrow y = 2$; $f''(y=2) < 0 \Rightarrow$ Máx

Solución: los números son: $\boxed{x = 8 \quad y = 2}$

3) Cortes de $f(x)$ con Eje X: $\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow P = (0,0)$



$\text{Area} = \int_{-2}^{0} -f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx = 2\int_0^2 \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}\,dx =$

Por simetría

$= 2\int_0^2 x\cdot(2x^2+1)^{-1/2}\,dx = \dfrac{2}{4}\left.\dfrac{(2x^2+1)^{-1/2+1}}{-1/2+1}\right]_0^2 = \ldots = \boxed{2u^2}$

4) a) $(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$

b) $\boxed{A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$

c) $A^t - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}}$

d) $\boxed{X = A^{-1}\cdot(A^t - 3B)}$

e) $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}}$

3

BC2

2ª Evaluación

Examen Matemáticas –TEMAS 7, 8 y 11. Cálculo

NOMBRE:

NOTA

(2 ptos.) ***EJERCICIO 1***

Estudia la continuidad de la siguiente función e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

(1 pto.) ***EXTRA:*** Realiza su representación gráfica

(5 ptos.) ***EJERCICIO 2***

Calcula el valor de las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2}{3+e^x}\,dx$ *(Cambio de variable sugerido $e^{-x} = t$)*

b) $\int x\cos(3x)\,dx$

c) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$

(2 ptos.) ***EJERCICIO 3***

Demuestra que la función $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x) - \cos(x)$,

a) Tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-\pi, \pi]$

b) Corta al eje de abscisas en algún punto en el intervalo $[0, \pi]$

(1 pto.) ***EJERCICIO 4***

Calcula el siguiente límite $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} =$

SOLUCIONES — Máxima puntuación = 40 ptos.

1) 8

$f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo si acaso en $x=0$, $x=1$, $x=2$. Veamos cada caso:

- En $x=0$: $\nexists f(0)$; $-1 = \lim_{x\to 0^-}(e^x-2) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x-1} \Rightarrow$ $f(x)$ presenta una discontinuidad $\boxed{\text{EVITABLE}}$ en $x=0$
- En $x=1$: $\nexists f(1)$, $\nexists \lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ Discontinuidad $\boxed{\text{SALTO } \infty}$
- En $x=2$: $1 = f(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-1} \neq \lim_{x\to 2^+} x = 2 \Rightarrow$ Disc. $\boxed{\text{SALTO FINITO de valor } 1}$

4

2) 8

a) $\int \frac{2}{3+e^x}dx = \left[\begin{array}{l} e^{-x}=t \\ -e^{-x}dx=dt \end{array}\right] = \int \frac{-2\,dt/t}{3+1/t} = -2\int \frac{dt}{3t+1} = \frac{-2}{3}\ln|3t+1| = \boxed{\frac{-2}{3}\ln|3e^{-x}+1| + K}$

8

b) $\int x\cos 3x\,dx = \left[\begin{array}{l} u=x \;,\; du=dx \\ dv=\cos 3x\,dx \;,\; v=\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x \end{array}\right] = \frac{x}{3}\operatorname{sen}3x - \int \frac{1}{3}\operatorname{sen}3x\,dx = \boxed{\frac{x}{3}\operatorname{sen}3x + \frac{1}{9}\cos 3x + K}$

4

c) $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \int \frac{dx}{9\left(\frac{4x^2}{9}+1\right)} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{9}\,\frac{3}{2}\int \frac{2/3\,dx}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1} = \boxed{\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{3}\right)+K}$

3)

4

a) De acuerdo con el teorema de Rolle, si $f(x)$ es continua en $[-\pi,\pi]$, derivable en $(-\pi,\pi)$ y $f(-\pi)=f(\pi)$, entonces $\exists\, c\in(-\pi,\pi) \,/\, f'(c)=0$, y $x=c$ es un extremo relativo. $f(x)=x\operatorname{sen}x-\cos x$ cumple estas condiciones al ser una función continua y derivable y $f(-\pi)=f(\pi)=1$.

4

b) $f(x)=x\operatorname{sen}x-\cos x$ es continua en $[0,\pi]$ y derivable en $(0,\pi)$ además es $\operatorname{sign} f(0) \neq \operatorname{sign} f(\pi)$, por lo que el teorema de Bolzano asegura que $\exists\, c\in(0,\pi) \,/\, f(c)=0$, $f(x)$ corta al eje X

4) 4

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e^{x-1}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \underset{\text{L'Hop}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{e^0} = \boxed{1}$

Recuperación BC2 2ª Evaluación	**Examen Matemáticas – Recuperación 2ª Evaluación** NOMBRE:	NOTA

(2 ptos) **1.-** Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, de forma que el área del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(0,a)$ y $C(\frac{a}{a-1}, 0)$ sea mínima.

(2 ptos) **2.-** Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x \ln(x)\, dx$.

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$. (Indicación: puedes ayudarte del cambio de variable $x = t^2$)

(2 ptos) **3.-** a) Despeja X de la ecuación matricial $X \cdot B - I = X \cdot A + A$, donde X, B, A e I son matrices de tipo 3×3.

b) Calcula la matriz X de tamaño 3×3, solución de la ecuación, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2 ptos) **4.-** Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

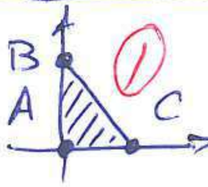
b) Asíntotas verticales y oblícuas.

(2 ptos) **5.-** a) Representa gráficamente la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x - 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x - 2$.

b) Calcula el área de dicha región.

SOLUCIONES Máxima puntuación = 40 ptos.

8 — ①



$A=(0,0)$, $B=(0,a)$, $C=\left(\frac{a}{a-1},0\right)$

$$\text{Área} = \frac{a/(a-1)\cdot a}{2} = \frac{a^2}{2(a-1)}$$

$$\frac{dA}{da} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2-2a}{(a-1)^2} = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \text{ (No vale)} \\ \boxed{2} \end{cases} ;\ \frac{d^2A}{da^2} > 0$$

8 — ② a)

$$\int x\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x; & du=\frac{dx}{x} \\ dv = x\,dx; & v=x^2/2 \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln|x| - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\int x\,dx = \boxed{\frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + K}$$

b)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{t}{1+t}2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{1+t}dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} t^2 & 1+t \\ \cline{2-2} -t^2-t & t-1 \\ \hline -t & \\ +t+1 & \\ \hline 1 & \end{array}\right] = 2\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t|\right) = \boxed{x-2\sqrt{x}+2\ln|1+\sqrt{x}|+K}$$

8 — ③

$$XB - XA = A + I;\ X(B-A) = A+I \Rightarrow \boxed{X = (A+I)(B-A)^{-1}}$$

$$A+I = \begin{pmatrix} 2&2&1\\0&3&1\\0&0&2 \end{pmatrix};\ (B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 2&2&1\\0&3&-2\\0&0&2 \end{pmatrix}}$$

8 — ④

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x};\ f'(x) = \frac{-x^2+4x}{(2-x)^2} = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases};\ x=2 \text{ es A.V.}$$

a) $(-)\quad 0 \quad (+) \quad 2\ (A.V.) \quad (+) \quad 4 \quad (-)$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ crece } \forall x\in(0,2)\cup(2,4) \\ f(x) \text{ decrece } \forall x \in (-\infty,0)\cup(4,\infty) \end{array}}$$

b) A.V: $Dom(f) = \mathbb{R}-\{2\}$; $\lim\limits_{x\to 2^\pm}\frac{x^2}{2-x} = \frac{4}{0^\pm} = \pm\infty \Rightarrow \boxed{x=2 \text{ es A.V.}}$

A.O: $m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(2-x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2-x} = -1$; $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2-x}+x\right) = -2$; $\boxed{y=-x-2 \text{ es A.O.}}$

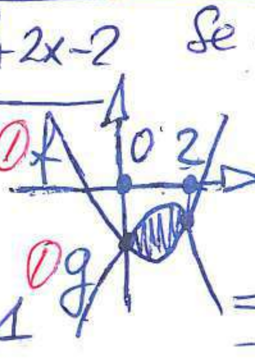
8 — ⑤

x	$f = x^2-2x-2$
V: 1	−3
0	−2
2	−2

$x_V = \frac{2}{2} = 1$

x	$g = -x^2+2x-2$
V: 1	−1
0	−2
2	−2

$x_V = \frac{-2}{-2} = 1$



Se cortan cuando $f=g \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \int_0^2 (g-f)\,dx = \int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx = \dots = \boxed{\frac{8}{3}u^2}$$

B2Fis

2ª Evaluación

Examen Matemáticas – Continuidad, Derivadas y Determinantes

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B2-2.1	Calcula determinantes hasta orden 4	3	25%	
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	1a	15%	
B3-1.2	Derivadas y teoremas asociados	2a y 2b	15%	
B3-2.1	Aplicaciones de las derivadas: L'Hôpital, Tangentes, Crecimiento, Curvatura, ...	1b y 2c	20%	
B3-2.2	Plantea problemas de optimización	4	25%	

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 1*

a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + be^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 0$. **(1,5 puntos)**

b) Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. **(1 punto)**

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 2*

a) Enuncia el Teorema de Bolzano. **(0,5 puntos)**

b) Razona que las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$ y $g(x) = e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre -1 y 0. **(1 punto)**

c) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$. **(1 punto)**

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 3*

a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes

$$|-A|, \qquad |A^{-1}|, \qquad |A^T|, \qquad |A^3| \qquad \textbf{(1 punto)}$$

b) Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 4*

Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima. **(2.5 puntos)**

SOLUCIONES **Máxima puntuación = 40 ptos.**

1 a) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+a & \text{si } x\le 0 \\ x^2+be^x+3 & \text{si } x>0\end{cases}$ | $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, salvo si acaso en $x=0$, al tratarse de sumas y restas de funciones cont. y derivables

6 * En $x=0$: $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$; $\underline{a=b+3}$

$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{si } x\le 0 \\ 2x+be^x & \text{si } x>0\end{cases}$; $f'_-(0)=f'_+(0) \Downarrow$ $\boxed{b=-2} \Rightarrow \boxed{a=1}$

4 b) En $x=0 \Rightarrow P=(0,1)$, $m=f'(0)=-2 \Rightarrow \boxed{r\equiv y-1=-2(x-0)}$

2 a) Ver Teoría | b) Sea $h(x)=f(x)-g(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3-e^x$

4 $h(x)$ cumple el teorema de Bolzano en $[-1,0]$, al ser continua en él y signo $f(-1)\neq$ signo $f(0)$, ya que $\begin{cases} f(-1)=-e^{-1} \\ f(0)=2\end{cases}$ por lo que $\exists c\in(-1,0)$ tal que $h(c)=0 \Rightarrow f(x)$ y $g(x)$ se cortan

c) $f(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3$; $f'(x)=15x^4-40x^3+30x^2$

4 $f''(x)=60x^3-120x^2+60x=0 \Rightarrow x=0,\ x=1$

$f'''(x)=180x^2-240x+60 \Rightarrow f'''(0)\neq 0$; $f'''(1)=0 \Rightarrow f^{IV}(1)\neq 0$

Como $f'''(0)\neq 0 \Rightarrow \boxed{x=0 \text{ es P.I}}$, como $f^{IV}(1)\neq 0 \Rightarrow x=1$ NO es PI

3 $|A_2|=5 \Rightarrow |-A_2|=(-1)^2\cdot|A_2|=\boxed{5}$; $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\boxed{\frac{1}{5}}$; $|A^t|=|A|=\boxed{5}$

4 a) $|A^3|=|A\cdot A\cdot A|=|A|\cdot|A|\cdot|A|=|A|^3=5^3=\boxed{125}$

6 b) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 30 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 4\end{vmatrix}=5\cdot 2\cdot 10\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=$

$=\underbrace{5\cdot 2\cdot 10\cdot 4\cdot(-1)}_{-400}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}}=-400\cdot 2=\boxed{-800}$

4 x + $y=90-x$, $\pi(90-x)$ $\Rightarrow$ Area $=\frac{\pi(x/2)^2}{2}+\frac{\pi(90-x)^2}{2}=A(x)$

10 $A'(x)=\pi\frac{x}{2}\frac{1}{2}-\pi(90-x)=0 \Rightarrow \frac{x}{4}=90-x \Rightarrow \underline{x=18}$

$A''(x=18)=\frac{\pi}{4}+\pi>0 \Rightarrow \boxed{x=18\text{ cm es mínimo} \Rightarrow y=90-x=72\text{ cm}}$

B2Bio 2ª Evaluación	Examen Matemáticas – Continuidad, Derivadas y Determinantes

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B2-2.1	Calcula determinantes hasta orden 4	3	25%	
B2-2.2	Determina el rango de una matriz aplicando el método de Gauss o determinantes	4	10%	
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	1a	12'5%	
B3-1.2	Derivadas y teoremas asociados	2	25%	
B3-2.1	Aplicaciones de las derivadas: L'Hôpital, Tangentes, Crecimiento, Curvatura, ...	1b	12'5%	
B3-2.2	Plantea problemas de optimización	5	15%	

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 1***

a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{ax}, & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \textbf{(1,25 puntos)}$$

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 2***

a) Enuncia el Teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo $(1, 2)$ donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula. **(1,5 puntos)**

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 3***

Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Sabemos que el determinante de A es $|A| = 2$. Calcula los siguientes determinantes:

a) $|2A|$.

b) $|A^{-1}|$.

c) $|A \cdot A^t|$ **(A^t es la traspuesta de la matriz A).**

d) Determinante de la matriz obtenida al intercambiar las dos primeras columnas de A.

e) Determinante de la matriz que se obtiene al sumar a la primera fila de A la segunda multiplicada por 2.

(1 pto.) ***EJERCICIO 4***

Calcule el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1'5 ptos.) ***EJERCICIO 5***

Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

SOLUCIONES Máxima puntuación = 40 ptos.

1 a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{ax} & \text{si } x<0 \\ \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^{x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ Para que sea continua debe ser: $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$

5

$1=f(0)=\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{ax}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hôp}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{a}\right)=\dfrac{2}{a}\Rightarrow \boxed{a=2}$

5 b) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^{x}=(1^{\infty})=e^{\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\left(\frac{2x+7}{2x+1}-1\right)\right]}=\boxed{e^{3}}$

2 a) Ver Teoría | b) $f(x)=x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12$ es una función continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$ por ser polinomio y $f(1)=f(2)=0$, en estas condiciones el teorema de Rolle asegura que $\exists c\in(1,2)/ f'(c)=0$ y por tanto la recta tangente en $x=c$ tiene pendiente nula

4 6

3 a) $|2A_3|=2^3|A_3|=8\cdot 2=\boxed{16}$; b) $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

10 c) $|A\cdot A^t|=|A|\cdot|A^t|=2\cdot 2=\boxed{4}$; d) Det $=-|A|=\boxed{-2}$

e) Det $=|A|=\boxed{2}$ ya que es c.l. de líneas paralelas

4 $rg(A)=rg\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\boxed{2}$ ya que $\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$ y

4 se puede encontrar un menor de orden 2 que sea distinto de 0.

5 Sean $x,y\in\mathbb{R}^{+} / \dfrac{x+y}{2}=24$; debe ser $P(x,y)=y\cdot x^2$ máximo $\Rightarrow y=48-x\Rightarrow P(x)=(48-x)\cdot x^2=48x^2-x^3$

$P'(x)=96x-3x^2=0\Rightarrow x=0,\ x=32.$

6 $P''(x)=96-6x$, $P''(x=0)=96>0\Rightarrow x=0$ es mínimo.

$P''(x=32)<0\Rightarrow \boxed{x=32,\ y=16 \text{ es un máximo}}$

B2Fis 2ª Evaluación

Examen Matemáticas –TEMAS 4, 5, 6, y 7: Cálculo y Matrices

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B3-1.2	Aplica el concepto de derivadas a la resolución de ejercicios	1	25%	
B3-3.1	Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas	2 y 3a	35%	
B3-4.1	Calcula el área de recintos limitados por curvas sencillas	3b	15%	
B2-1.2	Opera con matrices y aplica sus propiedades	4	25%	

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 1*

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) Representa gráficamente la función determinando además sus asíntotas. *(1 pto)*

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 2*

Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{5+3x^2}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2-3x}\,dx$

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 3*

a) **(1 punto)** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-dx}{1+e^x}$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

b) **(1,5 puntos)** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

(2'5 ptos.) *EJERCICIO 4*

Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X - 2B = C$. **(1,5 puntos)**

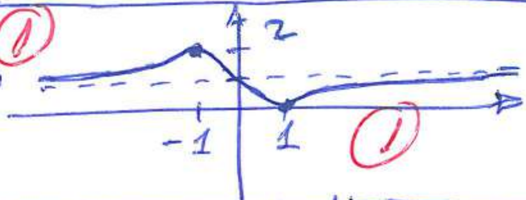
SOLUCIONES Máxima puntuación = 40 ptos.

1 a) (6) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$; $f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{x^2+1}=0 \Rightarrow x=\pm 1$ (1)

$f''(x)=\dfrac{8x}{x^2+1}$ (1) $\Rightarrow \boxed{f''(1)>0 \Rightarrow \text{mínimo en } P=(1,0) \quad f''(-1)<0 \Rightarrow \text{Máximo en } P=(-1,2)}$ (1) (1) (1) (1)

b) (4) A.H: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Rightarrow \boxed{y=1 \text{ es A.H.}}$ (1)

A.V.: No tiene (1); A.O: No tiene (1)



(1)

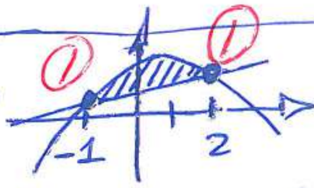
2 a) (4) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{5+3x^2}}dx=\int 3x(5+3x^2)^{-1/2}dx=\frac{1}{2}\,\frac{(5+3x^2)^{-1/2+1}}{-1/2+1}=\boxed{\sqrt{5+3x^2}+K}$ (1) (1) (1) (1)

b) (6) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2-3x}dx=\int\left(\frac{-4/3}{x}+\frac{7/3}{x-3}\right)dx=\boxed{-\frac{4}{3}\ln|x|+\frac{7}{3}\ln|x-3|+K}$ (1) (1) (1) (1) (1) (1)

3 a) (4) $\displaystyle\int \frac{-dx}{1+e^x}=\begin{bmatrix} t=e^x \\ dt=e^x dx\end{bmatrix}=\int\frac{-dt/t}{1+t}=-\int\frac{dt}{t(1+t)}=$ (1)

$\displaystyle=-\int\left(\frac{1}{t}+\frac{-1}{1+t}\right)dt=-\ln|t|+\ln|1+t|=\boxed{-x+\ln|1+e^x|+K}$ (1) (1) (1)

b) (6) $f(x)=-x^2+2x+4$
$g(x)=x+2$



(1) (1)

$\displaystyle A=\int_{-1}^{2}\left[-x^2+2x+4-(x+2)\right]dx=$ (1) (1)

$\displaystyle=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx=\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=\boxed{\frac{9}{2}\,u^2}$ (1) (1)

4 a) (4) $(A|\mathbb{I})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\-1&1&0&0&1&0\\2&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&1&1&1&0\\0&1&0&0&2&1\end{array}\right)\to$

$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&1&1&1&0\\0&0&-1&-1&3&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&3&2\\0&2&0&0&4&2\\0&0&-1&-1&3&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&0&2&2\\0&2&0&0&4&2\\0&0&-1&-1&3&2\end{array}\right)\to$

$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&2&1\\0&0&1&1&-3&-2\end{array}\right)$ (1) $=(\mathbb{I}|A^{-1}) \Rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\1&-3&-2\end{pmatrix}}$ (1) (1) (1)

b) (6) $A\cdot X=C+2B$
$\boxed{X=A^{-1}\cdot(C+2B)}$ (2) $\to X=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\1&-3&-2\end{pmatrix}$ (1) $\cdot\begin{pmatrix}2&5&5\\1&3&2\\2&-1&6\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3&2&8\\4&5&10\\-5&-2&-13\end{pmatrix}}$ (1) (1) (1)

B2Bio

2ª Evaluación

Examen Matemáticas –TEMAS 4, 5, 6, y 7: Cálculo y Matrices

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B3-1.2	Aplica el concepto de derivadas a la resolución de ejercicios	1 y 3a	35%	
B3-3.1	Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas	2	25%	
B3-4.1	Calcula el área de recintos limitados por curvas sencillas	3b	15%	
B2-1.2	Opera con matrices y aplica sus propiedades	4	25%	

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 1***

Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x-1}{2+x}$.

a) Estudia su monotonía y curvatura. [1,5 puntos]

b) Representa gráficamente la función determinando además sus asíntotas. *(1 pto)*

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 2***

Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{5-3x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+1}\,dx$

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 3***

Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ con $x \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 4***

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

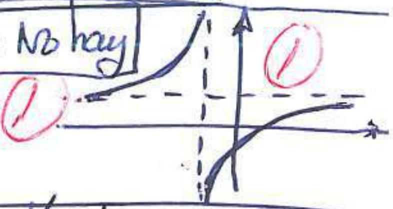
SOLUCIONES Máxima puntuación = 40 pts.

1 a) $f(x) = \dfrac{x-1}{2+x}$; $f'(x) = \dfrac{3}{(2+x)^2}$; $f''(x) = \dfrac{-6}{(2+x)^3}$

6 $\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ crece } \forall x \neq -2 \text{ ya que } f'(x) > 0 \\ f(x) \text{ es } \cup \ \forall x \in (-\infty, -2) \text{ y } \cap \ \forall x \in (-2, \infty) \end{array}}$

4 b) A.H. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-1}{2+x} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 \text{ es A.H.}}$ $\boxed{\text{A.O: No hay}}$

A.V. $\lim\limits_{x \to -2^{\pm}} \dfrac{x-1}{2+x} = \dfrac{-3}{0^{\pm}} = \mp\infty \Rightarrow \boxed{x = -2 \text{ es A.V.}}$



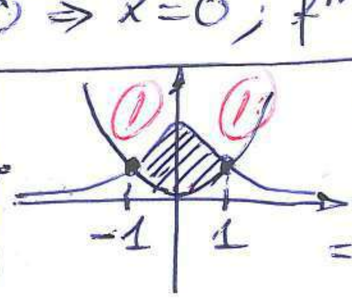
2 a) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{5-3x}}\,dx = -\int -3(5-3x)^{-1/2}\,dx = -\frac{(5-3x)^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \boxed{-2\sqrt{5-3x} + K}$

6 b) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+1}\,dx = \int \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{4}{x^2+1}\right) dx = \boxed{\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + 4\,\text{arctg}\,x + K}$

3 a) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$; $f''(x=0) < 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ Máx}}$ $\boxed{P = (0,1)}$

4 $g'(x) = x = 0 \Rightarrow x = 0$; $f''(x=0) > 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ es mín}}$ $\boxed{P = (0,0)}$

6 b) $\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ g(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$



$\displaystyle \text{Área} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \text{arctg}(x) - \frac{x^3}{6}\Big]_{-1}^{1} = \boxed{1'24\ u^2}$

4 a) $(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$

4 $\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

b) $A \cdot X + I = BC$

$AX = BC - I \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot (BC - I)}$

6 $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}}$

B2Bio RECUP 2ª Eval.

Examen Matemáticas – Recuperación 2ª Evaluación

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B2-2.1	Calcula determinantes hasta orden 4	1	25%	
B2-2.2	Calcula el rango de una matriz	2	25%	
B2-2.5	Plantea un sistema de ecuaciones desde un enunciado, lo clasifica y lo resuelve			
B3-1.2	Derivadas y teoremas asociados	3	25%	
B3-2.2	Plantea problemas de optimización	4	25%	
B3-3.1	Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas	EXTRA		

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 1***

Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x-3 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 2***

Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & z & = & m \\ 3x & & & - & 2z & = & 11 \\ & & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & m \end{array} \right.$$

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 3***

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & si\ x \leq -2 \\ t & si\ -2 < x < 2 \\ (x-4)^2 - 4 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = -2.

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f.

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 4***

Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**

(1 pto.) ***EXTRA***

Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región comprendida entre las gráficas de las parábolas $f(x) = -x^2 + a^2$ y $g(x) = -4x^2 + 4a^2$ sea 32 unidades de superficie.

SOLUCIONES — Máxima puntuación = 40 + 4 ptos

1)

5 a) $\begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x-3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & x-3 & 1 \\ y & y & 1 \\ z & z+7 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-9}$ (1) (1) (1) (1) $= 0$ (1)

5 b) $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} \Leftarrow \; = +6 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 = \boxed{12}$ (1) (1) (1)

0 (1) $\quad 6$ (1)

2)

10 $\left.\begin{array}{l} 2y - z = m \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = m \end{array}\right\}$ $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & m \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & m \end{array}\right)$, $|A|B| = -2m+12 = 0$ (1)

(1) $m = 6$

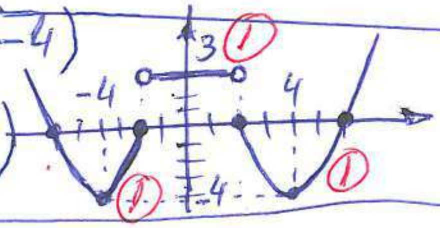
* Si $m = 6 \Rightarrow rg(A) = rg(A|B) = 3 =$ nº incog $\Rightarrow \boxed{SCD}$ (1) (1) (1) (1)

* Si $m \neq 6 \Rightarrow 3 = rg(A) \neq rg(A|B) = 4 \Rightarrow \boxed{SI}$ (1) (1) (1) (1)

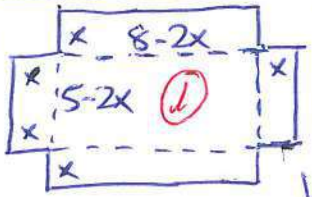
3)

5 a) $f(x)$ cont. en $x = -2 \Rightarrow \begin{cases} i) \; \exists f(-2) = 0 & (1) \\ ii) \; \lim_{x\to -2^-} [(x+4)^2 - 4] = \lim_{x \to -2^+} f & (2) \\ iii) \; f(-2) = \lim_{x\to -2} f(x) \Rightarrow \boxed{t = 0} & (1)\ (1) \end{cases}$

5 b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 12 & \text{si } x \le -2 \quad (x_v = -4) \\ 3 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2 - 8x + 12 & \text{si } x \geq 2 \quad (x_v = 4) \end{cases}$ (1) (1)



4)

10 

Volumen $= (8-2x)(5-2x)\cdot x$ (1)

$V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40$; $V'(x) = 12x^2 - 52x + 40$ (1) (1)

$V'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 10/3$ (No vale: no hay caja), $x_2 = 1$ (1) (1) (1) (1)

$V''(x) = 24x - 52 \Big|_{x=1} = -28 < 0 \Rightarrow$ $x = 1$ es máximo. (1) (1)

Las dimensiones son: 1, 3, 6 m (1)

Extra

4 $\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 + a^2 \\ g(x) = -4x^2 + 4a^2 \end{array}\right\}$ Area $= \int_{-a}^{a} (g - f)\,dx = \int_{-a}^{a} (-3x^2 + 3a^2)\,dx =$ (1)

$f(x) = g(x) \Rightarrow x = \pm a$ (1) $\quad = \left[\frac{-3x^3}{3} + 3a^2x\right]_{-a}^{a} = 4a^3 = 32 \Rightarrow \boxed{a = 2}$ (1) (1)

B2Fis

RECUP 2ª Eval.

Examen Matemáticas – Recuperación 2ª Evaluación

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B2-1.2	Opera con matrices y aplica sus propiedades	1	25%	
B2-2.2	Calcula el rango de una matriz			
B2-2.3	Conoce las condiciones de existencia de la matriz inversa y la calcula si es posible			
B2-2.5	Plantea un sistema de ecuaciones desde un enunciado, lo clasifica y lo resuelve	2	25%	
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	3 y EXTRA	25%	
B3-2.1	Aplicaciones de las derivadas: L'Hôpital, Tangentes, Crecimiento, Curvatura, ...			
B3-4.1	Calcula el área de recintos limitados por curvas sencillas	4	25%	

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 1***

a) Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tales que B es la inversa de A:

- Si $|A| = 3$, razona cuánto vale $|B|$.
- ¿Cuál es el rango de B?

b) Calcula el determinante de la matriz cuadrada X de orden 3 que verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 2***

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \Re$.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ ax & & & - & 3z & = & a \\ 2x & + & ay & - & z & = & a \end{array}\right\}$$

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 3***

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}$.

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 4***

a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -2x+3$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

(1 pto.) ***EXTRA***

La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ tiene un punto de inflexión en $(1, 10)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1 pto)

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 40 + 4 ptos.

(1) [5] a) $|B| = |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$ (1) (1) ; b) $rg(B) = rg(A) = n$ (1) (1) ; ya que $|B| \neq 0$ (1)

[5] c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} \cdot |X| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow 21 \cdot |X| = 21 \Rightarrow \boxed{|X| = 1}$ (1) (1) (1) (2)

(2) [10] $\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ ax - 3z = a \\ 2x + ay - z = a \end{array}\right\}$ $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & -3 & a \\ 2 & a & -1 & a \end{array}\right)$; $|A| = 2a^2 + 4a - 6$; $\underline{a = 1, -3}$ (1)

* Si $a = 1 \Rightarrow A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{cases} rg(A) = 2, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \\ rg(A|B) = 2, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Como } rg(A) = rg(A|B) = 2 < 3 = \text{nº incógn} \Rightarrow SCI}$ (1) (1) (1)

* Si $a = -3 \Rightarrow A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right)$ $\begin{cases} rg(A) = 2; \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \\ rg(A|B) = 3, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Como } 2 = rg(A) \neq rg(A|B) = 3 \Rightarrow SI}$ (1) (1) (1)

* Si $a \neq 1, -3 \Rightarrow \boxed{rg(A) = rg(A|B) = 3 = \text{nº incóg} \Rightarrow SCD}$ (1) (1) (1)

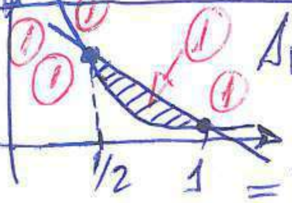
(3) [5] a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, salvo si acaso en $x = 2$ y en $x = 3$ (1)

• En $x = 2$: $\cos 2\pi = 1 = f(2) \neq \lim_{x \to 2^-} \dfrac{3}{x-2} = -\infty \Rightarrow \boxed{\text{Salto infinito}}$ (1) (1)

• En $x = 3$: $\cos 3\pi = -1 = f(3) = \lim_{x \to 3^+} \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 3^+} \dfrac{1/x-2}{-1} = -1$ (1) (2) (1) $\boxed{\text{Es continua}}$

[5] b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x e^{-x}}{1 + 2x - \cos(x^2)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{1 + 2x - \cos(x^2)} \cdot \lim_{x \to 0} e^{-x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{2 + 2x \operatorname{sen} x^2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ (1) (2) (1)

(4) [10] $\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ g(x) = -2x + 3 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ x = 1, x = 1/2 \end{array}$



Area $= \displaystyle\int_{1/2}^{1} \left(-2x + 3 - \frac{1}{x}\right) dx = \left[-\frac{2x^2}{2} + 3x - \ln x\right]_{1/2}^{1} = \boxed{0'06 \, u^2}$ (1) (1) (1) (1) (1)

EXTRA [4] $\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 16 \\ f''(x) = 6ax + 2b \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (1, 10) \text{ es P.I.} < \begin{array}{l} f(1) = 10 \text{ (1)} \\ f''(1) = 0 \text{ (1)} \end{array} \\ m(x=1) = 7 \Rightarrow f'(1) = 7 \text{ (1)} \end{array}$ $\boxed{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -9 \\ c = 0 \end{array}}$ (1)

Examen de Matemáticas - TEMAS 1, 9, 10, 11 y 12: ALGEBRA y CALCULO

BC2
2ª Evaluación

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Peso	Consecución
B2-1.2	Opera con matrices: **Ejercicio: 1**	20%	
B2-2.2	Calcula el rango de una matriz: **Ejercicio: 2**	20%	
B2-2.3	Cálculo de la matriz inversa: **Ejercicio: 3**	20%	
B3-3.1	Cálculo de primitivas: **Ejercicio: 4**	20%	
B3-4.1	Cálculo de áreas con integrales: **Ejercicio: 5**	20%	

NOTA

NOMBRE:

Ejercicio 1

Calcular todas las matrices X tales que $AX + B = X$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

a) Define el concepto de rango de una matriz.

b) Determina razonadamente si la tercera fila de la matriz A es combinación lineal de las dos primeras

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

Calcule la matriz inversa de la matriz $A = B^2 - 2 \cdot C$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4

Calcular, con el cambio de variable $t^2 = x + 3$, el valor de:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$$

Ejercicio 5

Representar gráficamente el recinto plano limitado por la curva $y = x^3 - x$ y su tangente en el punto de abscisa $x = 1$. Calcular su área

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 25 ptos.

S (1) $AX+B=X \Rightarrow (A-I)X+B=0$ (1), $X=-(A-I)^{-1}\cdot B$ (1)

$$X=-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\0&-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&-1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}}$$

(1) (1) (1)

S (2) $\boxed{\text{a) Ver Teoría (2)}}$ b) $\vec{F1}=(1,1,1)$; $\vec{F2}=(1,2,-1)$; $\vec{F3}=(2,1,1)$ (3)

¿Es $\vec{F3}=\alpha\vec{F1}+\beta\vec{F2}$? $\Rightarrow$ 1ª forma: Ver si existen α y β que verifiquen esa combinación lineal. Se comprueba que no $\Rightarrow$ $\boxed{\text{No es } \vec{F3} \text{ c.l.}}$

2ª forma: $Rg(\vec{F1},\vec{F2},\vec{F3})=Rg\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&1&1\end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&-1&-1\end{pmatrix}=$

$=Rg\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&0&-3\end{pmatrix}=3 \Rightarrow$ los tres vectores son linealmente indptes.

S (3) $A=B^2-2C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$ (1) $-\begin{pmatrix}2&0&0\\2&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}$ (1) $\Rightarrow$

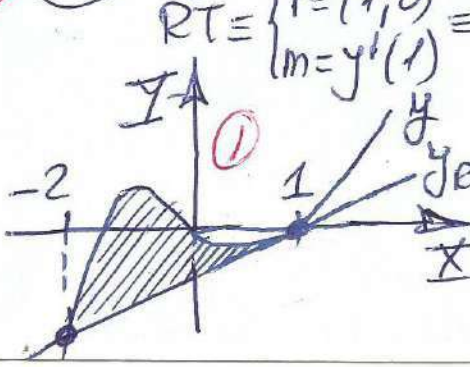
$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&0&2\\-2&-1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$ (1) $\Rightarrow \boxed{A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-2&-1\\-2&2&2\\1&0&0\end{pmatrix}}$ (1) (1)

S (4) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}=\begin{bmatrix}t^2=x+3\\2t\,dt=dx\end{bmatrix}=\int\frac{(t^2-3)2t\,dt}{t}=\int(2t^2-6)\,dt=$ (1)

$=\dfrac{2t^3}{3}-6t=\boxed{\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}-6\sqrt{x+3}+C}$ (1) (1) (1) (1)

S (5) $y=x^3-x \Rightarrow y'=3x^2-1 \Rightarrow y''=6x \Rightarrow x=\frac{+1}{\sqrt3}$ es mín, $x=\frac{-1}{\sqrt3}$ es máx

$RT\equiv\begin{cases}P=(1,0)\\m=y'(1)\end{cases}\equiv y_{RT}=2x-2$ (1)



$y_{RT}=y$

$2x-2=x^3-x$

$x=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$ (1)

$\text{Área}=\displaystyle\int_{-2}^{1}[(x^3-x)-(2x-2)]\,dx=$ (1)

$=\displaystyle\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}\Rightarrow$

$\text{Área}=\boxed{\dfrac{27}{4}u^2}$ (1)

RECUPERACIÓN

BC2

2ª Evaluación

Matemáticas – Recuperación 2ª Evaluación: Cálculo y Algebra

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B2-1.2	Opera con matrices	1	25%	
B2-2.1	Cálculo de determinantes hasta orden 4	2a y 2c	15%	
B2-2.3	Cálculo de la matriz inversa	2b	10%	
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función	3a	15%	
B3-2.1	Uso de la regla de L'Hôpital	3b	10%	
B3-2.2	Aplicaciones de las derivadas	4a	15%	
B3-3.1	Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas	4b	10%	

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 1***

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2 = aA + bI$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$. **(1,25 puntos)**

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 2***

a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. **(1 punto)**

c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. **(0,5 puntos)**

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 3***

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + a}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ bx - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**

b) Calcula razonadamente el parámetro b para que $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 4$. **(1 punto)**

(2'5 ptos.) ***EJERCICIO 4***

Después de la administración por vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: $C(t) = at^2 e^{-bt}$, donde $t \in [0, +\infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a, b \in \mathbb{R}^+$.

a) Determina los valores de a y b para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto $(2,\ 8e^{-2})$. **(1,5 puntos)**

b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado. **(1 punto)** **Nota:** A largo plazo se entiende como que $t \to +\infty$.

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 40 ptos

1 a) $A^2=aA+b\cdot\mathbb{I}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

5 $1=a+b;\ -6=-3a;\ 1=a+b\Rightarrow\boxed{a=2;\ b=-1}$

5 b) $(A-X)(A+X)=A^2-X^2\Rightarrow A^2+AX-XA-X^2=A^2-X^2\Rightarrow$

$AX-XA=0\Rightarrow AX=XA\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$

$a-3c=a;\ b-3d=-3a+b\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\ \forall a,b\in\mathbb{R}}$

2 a) $\exists A^{-1}\Leftrightarrow|A|\neq0\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}a-1&1&-1\\0&a-2&1\\a&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-1&a-1&0\\0&a-2&1\\3a-2&2&0\end{vmatrix}=$

4 $=-1\cdot\begin{vmatrix}a-1&a-1\\3a-2&2\end{vmatrix}=(1-a)\begin{vmatrix}1&0\\3a-2&-3a+4\end{vmatrix}=(1-a)(4-3a)\neq0\Rightarrow\begin{cases}a\neq1\\a\neq4/3\end{cases}$

4 b) $A(a=2)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&1\\2&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}&\cdots\\\vdots&\end{pmatrix}^t=\boxed{\begin{pmatrix}0&-1&1/2\\1&2&-1/2\\0&1&0\end{pmatrix}}$

Comprobamos que $A\cdot A^{-1}=\mathbb{I}$

2 c) $A(a=0)=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}|A^{-1}|=1/|A|=\boxed{1/4}\\|2A|=2^3\cdot|A|=8\cdot4=\boxed{32}\end{cases}$

$|A|=4$

3 a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, salvo, si acaso en $x=0$:

En $x=0$: $-1=f(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+a}{x-1}=\lim_{x\to0^+}(bx-1)=-a\Rightarrow\boxed{a=1}$

6 Con $a=1$, veamos si $f(x)$ es derivable en $x=0$: $f'_-(0)=f'_+(0)$

$\lim_{x\to0^-}\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to0^+}(b)\Longrightarrow\boxed{b=-1}$

4 b) $4=\int_1^2f(x)\,dx=\int_1^2(bx-1)\,dx=\left.\frac{bx^2}{2}-x\right]_1^2=\frac{3b}{2}-1\Rightarrow\boxed{b=\frac{10}{3}}$

4 $c(t)=at^2e^{-bt};\ c'(t)=ae^{-bt}(2t-t^2);\ c'(t)=0\Rightarrow t=\begin{cases}0\\2\end{cases}$

6 a) En $t=2$, debe ser $c(2)=8\cdot e^{-2}\Rightarrow4ae^{-2b}=8e^{-2}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$

4 b) $c(t\to\infty)=\lim_{t\to\infty}\frac{at^2}{e^{bt}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'Hop}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{2at}{be^{bt}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{2a}{b^2e^{bt}}=\boxed{0}$

Conforme avanza el tiempo, el fármaco desaparece del organismo.

BC2

2ª Evaluación

Examen Matemáticas–Continuidad, Derivabilidad y Determinantes

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B2-2.1	Cálculo de determinantes hasta orden 4	1, 2 y 3	60%	
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	4	20%	
B3-2.1	Uso de la regla de L'Hôpital	5	20%	

(2 ptos.) ***EJERCICIO 1***

Discute, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix}$$

(2 ptos.) ***EJERCICIO 2***

Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

Estudia para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ el rango de la matriz $M - \lambda N$ es igual a 3.

(2 ptos.) ***EJERCICIO 3***

Calcula el determinante de la matriz cuadrada X de orden 3 que verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(3 ptos.) ***EJERCICIO 4***

a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + be^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 0$.

b) Representa la función para a = b = 0

c) Para b = 2, calcula $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2}$

(1 pto.) ***EJERCICIO 5***

Calcula el valor del límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \ln(x+1)}{2 - 2\cos x}$

SOLUCIONES Máxima puntuación = 30 pts.

6 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m-3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m & 0 & m \\ m-1 & m-3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ m & 0 & 0 \\ m-1 & m-3 & -m \end{vmatrix} =$ (1)

NF2=F2−F1 (1) NC3=C3−C1 (1)

$= -m \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ m-3 & -m \end{vmatrix} = -m(-3m+2m-6) = m(m+6)$ (1)

• Si $m=0 \Rightarrow Rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 2$ (1) • Si $m=-6 \Rightarrow Rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & -7 \\ -7 & -9 & -1 \end{pmatrix} = 2$ (1)

• Si $m \neq 0, -6 \Rightarrow Rg = 3$ (1)

6 (2) $M-\lambda N = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \\ -2\lambda & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ (1); $Rg(M-\lambda N)=3$ si $|M-\lambda N| \neq 0 \Rightarrow$ (1)

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \\ -2\lambda & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ -1+\lambda & 0 & 1-\lambda \\ -2\lambda & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1+\lambda & 1-\lambda \\ -2\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = -3\lambda^2+6\lambda-3 \neq 0$ (1) (1) (1)

$\Downarrow$

$\boxed{\forall \lambda \neq 1}$ (1)

6 (3) $A \cdot X = B \Rightarrow |A \cdot X| = |B| \Rightarrow |A| \cdot |X| = |B| \Rightarrow |X| = \frac{|B|}{|A|} \Rightarrow$ (1)

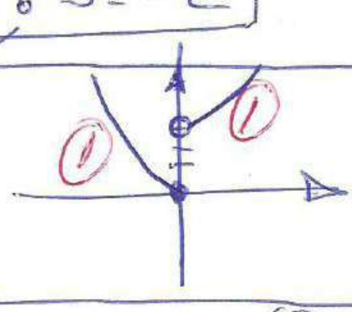
$\Rightarrow |X| = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \frac{21}{-7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{21}{21} \Rightarrow \boxed{|X| = 1}$ (1) (1) (1) (1)

(4) a) $f(x)$ es continua en $x=0$ si: $a = f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = b+3$

3 $f(x)$ es derivable en $x=0$ si: $-2 = f'_-(0) = f'_+(0) = b$.

Resolviendo $\begin{cases} a = b+3 & (1) \\ -2 = b & (1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=1 \,,\; b=-2}$ (1)

3 b) $a=b=0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2-2x & x \leq 0 \\ x^2+3 & x > 0 \end{cases}$



R1)

x	0	1 (Vert)	2
y	0	−1	0

(1)

R2)

x	0 (Vert)	−1	1
y	3	4	4

3 c) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2e^x+3}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \cdots = \boxed{\infty}$ (Por comparación) (1) (1)

3 (5) $\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(x+1)}{2-2\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'Hop}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}}{2 \operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'Hop}{=}$ (1) (1)

$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}}{2\cos x} = \frac{1+1}{2} = \boxed{1}$ (1)

Examen de Matemáticas – RECUPERACION 2ª Evaluación: CALCULO y ALGEBRA

BC2

2ª Evaluación

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Peso	Consecución
B2-2.1	Uso de los determinantes: **Ejercicio: 3**	25%	10
B2-2.4	Resuelve sistemas de ecuaciones: **Ejercicio: 4**	25%	10
B3-1.2	Derivadas y Teoremas asociados: **Ejercicios: 1 y 2b**	35%	14
B3-4.1	Cálculo de áreas con integrales: **Ejercicio: 2a**	15%	6

NOTA

NOMBRE: TOTAL = 40 ptos.

Ejercicio 1

a) Enuncia los Teoremas de Bolzano y de Rolle. **(1 punto)**

b) Razona que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ tiene al menos una solución real. **(0,75 puntos)**

c) Razona que, de hecho, dicha solución es única. **(0,75 puntos)**

Ejercicio 2

a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 11$. **(1,5 puntos)**

b) Calcula $c \in \mathbb{R}$ para que las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa $x = c$ tengan la misma pendiente. **(1 punto)**

Ejercicio 3

Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$$

donde $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. **(1,25 puntos por determinante)**

Ejercicio 4

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & mz & = & 0 \\ 4x & - & 3y & + & 2z & = & m \\ -mx & + & y & - & z & = & 1-m \end{array} \right. \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 40 ptos.

1) a) Ver teoría. b) Sea $f(x)=2e^x+x^5$, continua en $[-1,0]$ y con $f(-1)\cdot f(0)<0$, por lo que el teorema de Bolzano asegura que $\exists\, c\in(-1,0) \,/\, f(c)=0$, y por tanto $2e^c+c^5=0$

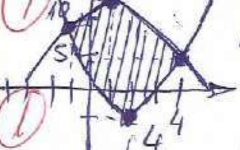
c) Sea $f(x)=2e^x+x^5$ continua y derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x)=2e^x+5x^4$; al ser $f'(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)$ es estrictamente creciente, por lo tanto no puede cortar dos veces al eje X.

2) a)

x	$y_1=x^2-4x+3$	x	$y_2=-x^2+2x+11$
-1	8	-1	8
V: 2	-1	V: 1	12
4	3	4	3

$x_V=\frac{4}{2}=2$ $x_V=\frac{-2}{-2}=1$

$x^2-4x+3=-x^2+2x+11 \Rightarrow x=\begin{cases}-1\\ 4\end{cases}$



$\text{Área}=\int_{-1}^{4}(y_2-y_1)\,dx=\int_{-1}^{4}(-2x^2+6x+8)\,dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+8x\right]_{-1}^{4}=$

$=\frac{-128}{3}+48+32-\left(\frac{2}{3}+3-8\right)=\boxed{\frac{125}{3}u^2}$

b) $f'(c)=g'(c)\Rightarrow 2c-4=-2c+2 \Rightarrow \boxed{c=3/2}$

3) a) $\begin{vmatrix}14 & 14 & 21\\ x+4 & y+4 & z+6\\ a/5 & 2b/5 & 3c/5\end{vmatrix}=7\cdot\frac{1}{5}\left(\begin{vmatrix}2&2&3\\x&y&z\\a&2b&3c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&2&3\\4&4&6\\a&2b&3c\end{vmatrix}\right)=\frac{7}{5}(10+0)=\boxed{14}$

b) $\text{Det}=-5\cdot3\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\a&2b&3c\\2&2&3\end{vmatrix}=-5\cdot3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}2&2&3\\a&2b&3c\\x&y&z\end{vmatrix}=-5\cdot3\cdot(-1)(-1)\cdot10=\boxed{-150}$

4) a) $A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&m&0\\4&-3&2&m\\-m&1&-1&1-m\end{array}\right)$; $|A|=-3m^2+6m-3=0\Rightarrow \underline{m=1}$

- Si $m=1\Rightarrow A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\4&-3&2&1\\-1&1&-1&0\end{array}\right)\Rightarrow \boxed{Rg(A)=Rg(A|B)=2<3=\text{nº incógn.}}$ SCI
- Si $m\neq1\Rightarrow \boxed{Rg(A)=Rg(A|B)=3=\text{nº incog.}\Rightarrow SCD}$

b) Es un SCI si $m=1$ (con 1 grado de libertad)

$\left.\begin{array}{l}x-y+z=0\\4x-3y+2z=1\\-x+y-z=0\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x-y=-z\\4x-3y=1-2z\end{array}\right\}$ $\boxed{\left.\begin{array}{l}x=1+t\\y=1+2t\\z=t\end{array}\right\}\ \forall t\in\mathbb{R}}$

Examen de Matemáticas - TEMA 7, 8, 11 y 12: INTEGRALES y DERIVADAS

BC2

2ª Evaluación

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Peso	Consecución
B1:	Procesos y métodos matemáticos: **Ejercicios: 1, 2, 3 y 4**	10%	4
B3-1.2	Continuidad, Derivadas y Teoremas: **Ejercicio: 1**	20%	8
B3-2.1	Uso de la Regla de L´Hôpital: **Ejercicio: 2**	20%	8
B3-3.1	Cálculo de primitivas: **Ejercicio: 3**	25%	10
B3-4.1	Cálculo de áreas con integrales: **Ejercicio: 4**	25%	10

NOTA

NOMBRE: Máxima puntuación = 40 ptos

Ejercicio 1

Sea la función $f(x)=\begin{cases} a+bx-x^2 & si\ x\le 2 \\ x^2+ax-8 & si\ x>2 \end{cases}$

a) Halla los valores de a y b para que la f(x) cumpla las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en $[-1, 4]$ y determina el valor o valores que verifican la tesis.

b) Representa la función para a = 2 y b = 0. Estudia sobre la gráfica su continuidad en x = 2.

Ejercicio 2

Calcula $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x)$ y utiliza este resultado para calcular $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$

Ejercicio 3

Resuelve las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int x\cdot e^x\cdot dx=$ b) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1}dx=$ c) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}dx=$ (c admiten el cambio $t^2=x+1$)

Ejercicio 4

Se consideran las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=x$

a) Calcula $\int_{-1}^{2}(f+g)dx$

b) Dibuja el recinto acotado y limitado por las dos funciones.

c) Calcula el área encerrada entre sus gráficas.

SOLUCIONES Máxima puntuación $= 36 + 4 (B1) = 40$

1) a) Para que $f(x)$ cumple las hipótesis del TVM de Lagrange en $[-1,4]$ debe ser continua y derivable, entonces $\exists\, c \in (-1,4) / f'(c) = \frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}$

• Continuidad en $x=2$: $a+2b-4 = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4+2a-8$

• Derivabilidad en $x=2$: $b-4 = f'_-(2) = f'_+(2) = 4+a \Rightarrow \begin{cases} -a+2b=0 \\ a-b=-8 \end{cases}$

Para $\boxed{a=-16,\ b=-8}$ $\exists\, c\in(-1,4)/ f'(c) = \frac{-56+9}{4+1} = \frac{-47}{5} = \begin{cases} \to -8-2c \\ \to 2c-16 \end{cases}$

$-8-2c = \frac{-47}{5} \Rightarrow \boxed{c = 7/10 < 2} \Rightarrow$ VALE. $2c-16 = \frac{-47}{5} \Rightarrow \boxed{c = \frac{33}{10}} \Rightarrow$ VALE

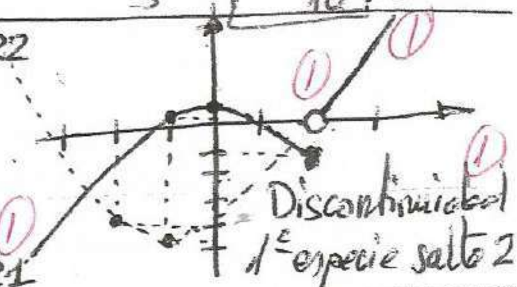
b) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\le 2 \\ x^2+2x-8 & \text{si } x>2 \end{cases}$

R1)

x	2	0 (vért.)	-1
y	-2	2	1

R2)

x	y
2	0
V: -1	-9
-2	-8



Discontinuidad 1ª especie salto 2

2) $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = \boxed{0}$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+x\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+0}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \boxed{+\infty}$

3 a) $\int x e^x dx = \begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = \boxed{xe^x - e^x + K}$

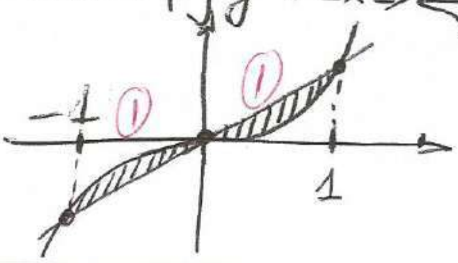
3) b) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1} dx = \int (2x+1)^{1/2-1} dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^{-1/2} dx = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \boxed{\sqrt{2x+1}+K}$

c) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} dx = \begin{bmatrix} t^2 = x+1 \\ 2t\,dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{\sqrt{t^2}}{t^2+1}\, 2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt =$

$= 2t - 2\,\mathrm{arctg}(t) = \boxed{2\sqrt{x+1} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x+1} + K}$

4) a) $\int_{-1}^{2}(f+g)dx = \int_{-1}^{2}(x^3+x)dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = 4+2-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{21}{4}}$

b) Corte de f y g: $x^3 = x \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$



c) Área $= \int_{-1}^{0}(x^3-x)dx + \int_{0}^{1}(x-x^3)dx =$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = -\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) +$

$+\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}u^2}$

Examen de Matemáticas - TEMA 1, 2, 3, 9 y 10: ALGEBRA y DERIVADAS

BC2

2ª Evaluación

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Peso	Consecución
B1:	Procesos y métodos matemáticos: **Ejercicios: 1, 2, 3 y 4**	20%	12
B2-1.2	Opera con matrices: **Ejercicio: 3b**	10%	6
B2-2.1	Uso de los determinantes: **Ejercicio: 4a**	15%	9
B2-2.2	Calcula el rango de una matriz: **Ejercicio: 3c**	10%	6
B2-2.3	Cálculo de la matriz inversa: **Ejercicio: 3a**	5%	3
B2-2.4	Resuelve sistemas de ecuaciones: **Ejercicio: 4b**	10%	6
B3-1.2	Continuidad, Derivadas y Teoremas: **Ejercicio: 1**	15%	9
B3-2.2	Resuelve problemas de optimización: **Ejercicio: 2**	15%	9

NOTA

NOMBRE: TOTAL: 60 ptos.

Ejercicio 1

Enuncia el teorema de Weierstrass y halla los extremos absolutos y relativos de la función $f(x) = x \cdot \ln(x)$ en el intervalo (0, e]

Ejercicio 2

Se tiene un alambre de 2 metros de longitud que se desea dividir en dos partes y formar con la primera un cuadrado y con la segunda un círculo, halla el radio del círculo para que la suma de las áreas de las dos figuras sea mínima.

Ejercicio 3

Dada la ecuación matricial $X \cdot B + B = B^{-1}$ y la matriz $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué condición debe cumplir B para que exista B^{-1}? Halla si es posible B^{-1}.

b) Halla si es posible la matriz X que cumple la condición del enunciado.

c) Halla el rango de la matriz $B - t \cdot I$ para cualquier valor de $t \in R$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Ejercicio 4

a) Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro $a \in R$:

$$\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ x - y - a \cdot z &= 1 \\ 3x - a \cdot y &= 5 \\ 2a \cdot y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

b) Resuelve para el caso $a = 1$

SOLUCIONES Máxima puntuación = 48 ptos + 12 ptos (Explicación)

9 ① a) Ver Teoría. (3)

b) $y = x\cdot\ln(x)$; $y' = \ln x + 1$ (1); $y'' = \dfrac{1}{x}$

$y' = 0 \Rightarrow$ (1) $x = e^{-1}$; $y''(e^{-1}) > 0 \Rightarrow x = e^{-1} \in (0, e]$ es mínimo (1)

De existir más extremos, estos serían absolutos en $x = e \in [e^{-1}, e]$ de acuerdo con el teorema (1) de Weierstrass. Como $f(e) > f(e^{-1})$ y $f(x)$ es creciente en $x > e^{-1}$: $\boxed{x = e^{-1} \text{ es mínimo (1)},\ x = e \text{ máximo (1)}}$

9 ② $x\,\boxed{x}$ Ⓡ $\underbrace{4x \quad 2\pi R}_{2\text{ metros}}$ Función a optimizar: $A(x,R) = x^2 + \pi R^2$ (2)

Restricción: $4x + 2\pi R = 2 \Rightarrow x = \dfrac{1-\pi R}{2}$ (2)

$A(R) = \left(\dfrac{1-\pi R}{2}\right)^2 + \pi R^2$; $A'(R) = \dfrac{\pi}{2}(\pi R - 1) + 2\pi R$

$A'(R) = 0$ (2) $\Rightarrow R = \dfrac{1}{4+\pi}$; $A''(R = 1/4+\pi) > 0$ (2) $\Rightarrow \boxed{R = \dfrac{1}{4+\pi} \text{ es mínimo}}$ (1)

③ a) $\exists B^{-1} \Leftrightarrow$ (1) $|B| \neq 0$; $|B| = \dfrac{1}{2^3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{8}(-4) = \dfrac{-1}{2} \neq 0$

3

b) $X = (B^{-1}B)\cdot B^{-1} = (B^{-1})^2 - \mathbb{I}$ (3) $\quad B^{-1} = \dfrac{[Ady(B)]^t}{|B|}$ (1) $\Rightarrow \boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ (1)

6 $\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ (3)

6 c) $C = B - t\cdot\mathbb{I} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 1 & -1-t & 1 \\ -1 & 1 & 1-t \end{pmatrix}$ (2)

$Rg(C) = Rg\begin{pmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 1 & -1-t & 1 \\ -1 & 1 & 1-t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 1 & -1-t & 1 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(t-1)(t+2)$ (2)

$\boxed{\text{Si } t = 2, 1, -2 \Rightarrow Rg(C) = 2 \text{ (1)},\ \text{Si } t \neq 2, 1, -2 \Rightarrow Rg(C) = 3 \text{ (1)}}$

④ $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -a & 1 \\ 3 & -a & 0 & 5 \\ 0 & 2a & 3 & 2 \end{array}\right)$; $|A|B| = 6(a-1)^2 = 0$ (1) $\Rightarrow a = 1$

9 a) DISCUSIÓN: $\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } a = 1 \text{ (2)} \Rightarrow Rg(A) = Rg(A|B) = 2 < 3 = n^{\circ}\text{ incog.} \Rightarrow SCI \text{ (2)} \\ \text{Si } a \neq 1 \text{ (2)} \Rightarrow 3 = Rg(A) \neq Rg(A|B) = 4 \Rightarrow SI \text{ (2)} \end{array}}$

6 b) RESOLUCIÓN si $a = 1$: Como $Rg(A) = 2$, tomamos en A un menor (2) distinto de 0 de orden 2:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 3 \\ x - y - z = 1 \\ 3x - y \quad = 5 \\ 2y + 3z = 2 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 3 - 2z \\ \text{(2)}\ 2y = 2 - 3z \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{4-t}{2} \text{ (2)} \\ y = \dfrac{2-3t}{2} \\ z = t \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array}}$$

MATEMATICAS. BC2 — 2ª Evaluación. E3

(Todos los ejercicios corresponden a la prueba de 2002 en la UCLM)

Ejercicio 1

Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = |x+2|$. Dibújalas en un mismo sistema de ejes coordenados y calcula el área del recinto limitado por sus gráficas.

Ejercicio 2

La función $f:[0,5] \to R$, dada por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & si\ 0 \le x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & si\ 2 \le x \le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0,5) y además verifica que f(0) = f(5). ¿Cuánto valen a, b y c?

Ejercicio 3

Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^2 - 4} & si\ x \le 0 \\ x^2 - 4x - 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

Ejercicio 4

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x$ en x = 1.

b) Calcula el área del reciento limitado por dicha tangente y la curva f(x).

Ejercicio 5 *(Elegir una de las dos opciones)*

Calcula la integral:

OPCION A: $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2}{x^3 - 3x + 2}\,dx$

OPCION B: $\displaystyle\int (x^2 + 2x + 1)\ln(x)\,dx$

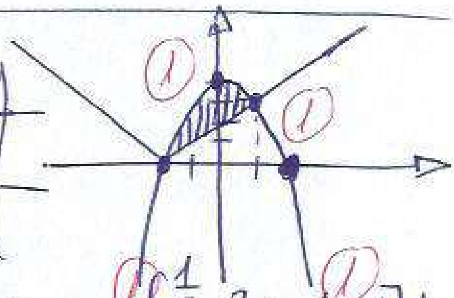
= 2 puntos cada ejercicio=

SOLUCIONES Máxima puntuación = 50 pts.

10 **1)**

x	0	2	-2
$y=-x^2+4$	4	0	0

x	-2	1
$y=x+2$	0	3
$y=\lvert x+2\rvert$	0	3



$x_v=\dfrac{-b}{2a}=0$

$\left.\begin{array}{l} y=x+2 \\ y=-x^2+4 \end{array}\right\} \underline{\underline{x=-2}} \quad \underline{\underline{x=1}}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} y=-x-2 \\ y=-x^2+4 \end{array}\right\} \underline{\underline{x=-2}}$

$\text{Área} = \displaystyle\int_{-2}^{1}\left[-x^2+4-(x+2)\right]dx = \left[\frac{-x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1} = \boxed{\frac{9}{2}u^2}$

10 **2)**

- Continuidad de $f(x)$ en $x=2$: $2a+4b=f(2)=\lim\limits_{x\to 2^{\pm}} f(x)=c+1$
- Derivabilidad de $f(x)$ en $x=2$: $a+4b=f'_-(2)=f'_+(2)=\frac{1}{2}$
- $f(0)=f(5)$: $0=c+2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a+4b=c+1 \\ a+4b=1/2 \\ c+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=-3/2 \quad b=1/2 \quad c=-2}$

10 **3)** a) Continuidad: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ salvo, si acaso en: $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

- En $x=0$: $\underline{\underline{-1}}=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} f(x)=\underline{\underline{-1}}$: ¡Es continua!
- En $x=-2$: $\nexists f(-2)$: ¡No es continua! • En $x=2$: ¡Es continua!

b) Derivabilidad:

$f'(x)=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2} & \text{si } x<0 \\ 2x-4 & \text{si } x>0 \end{array}\right. \qquad \underline{\underline{0}}=f'_-(0)\neq f'_+(0)=\underline{\underline{-4}}$

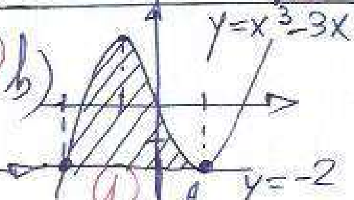
¡No es derivable en $x=0$!

$\boxed{f(x) \text{ es continua } \mathbb{R}-\{-2\} \text{ y derivable en } \mathbb{R}-\{-2,0\}}$

10 **4)** a) $RT\equiv\left\{\begin{array}{l} x_0=1,\ y_0=-2 \\ m=y'(1)=0 \end{array}\right.\equiv\boxed{y=-2}$

$\text{Corte}\equiv\left\{\begin{array}{l} y=x^3-3x \\ y=-2 \end{array}\right. \quad \boxed{\begin{array}{l} \underline{x=-2 \quad y=-2} \\ \underline{x=1 \quad y=-2} \end{array}}$

b)



$\text{Área}=\displaystyle\int_{-2}^{1}\left[x^3-3x-(-2)\right]dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1} = \boxed{27/4\ u^2}$

10 **5)** OPCIÓN A: $\displaystyle\int\frac{x^2-2}{x^3-3x+2}dx=\int\frac{7/9}{x-1}dx+\int\frac{-1/3}{(x-1)^2}dx+\int\frac{2/9}{x+2}dx=$

$=\boxed{\dfrac{7}{9}\ln|x-1|+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{9}\ln|x+2|+C}$

OPCIÓN B: $\displaystyle\int(x^2+2x+1)\ln x\,dx=$

$=\left[\begin{array}{ll} u=\ln x & du=1/x\,dx \\ dv=(x^2+2x+1)dx & v=\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+x \end{array}\right]=$

$=\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2+x\right)\ln x-\displaystyle\int\left(\frac{x^2}{3}+x+1\right)dx=$

$=\boxed{\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2+x\right)\ln x-\dfrac{x^3}{9}-\dfrac{x^2}{2}-x+C}$

MATEMATICAS. BC2 2ª Evaluación-E3

1 Dibujar el recinto limitado por $y = x^2 - 4x$; $y = 2x - 5$. Calcular su área.

(Septiembre 1997)

2 Dibujar el recinto limitado por $y = x^2$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{x}{4}$. Calcular su área.

(Junio 1997)

3 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 1$. Calcula el área del recinto limitado por la recta tangente y la curva dada.

(Junio 2002)

4 Calcular $\int \frac{2x^2 - 4x + 1}{x(x^2 - 2x + 1)} dx$

(Junio 1997)

5 Calcular $\int \cos\sqrt{3x}\, dx$ **AYUDA: Haz el cambio** $\sqrt{3x} = t$

(Septiembre 1997)

SOLUCIONES Máxima puntuación = 24 ptos (+6 EXTRA)

---

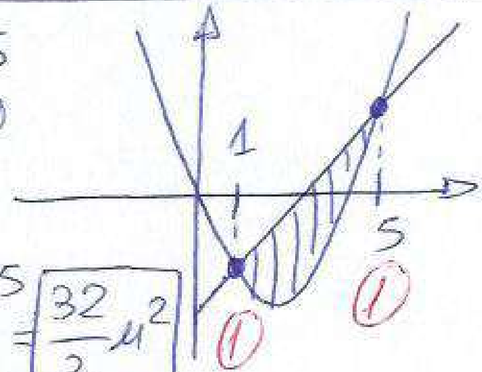
1 6

x	$y=x^2-4x$	$y=2x-5$
VERT: 2	-4	
1	-3	-3
5	5	5

$x^2-4x=2x-5$

$x^2-6x+5=0$

$x = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$



$$\text{Área} = \int_1^5 \left[2x-5-(x^2-4x)\right]dx = \left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right]_1^5 = \boxed{\frac{32}{3}u^2}$$

---

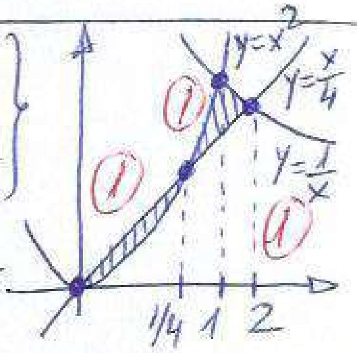
2 6

x	$y=x^2$	$y=\frac{1}{x}$	$y=\frac{x}{4}$
VERT: 0	0		0
1/4	1/16		1/16
1	1	1	
2		1/2	1/2

$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=\frac{1}{x} \end{array}\right\}$ $\underline{\underline{x=1}}$

$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=\frac{x}{4} \end{array}\right\}$ $\underline{\underline{x=1/4}}$

$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{x} \\ y=\frac{x}{4} \end{array}\right\}$ $\underline{\underline{x=2}}$



$$\text{Área} = \int_0^{1/4}\left(\frac{x}{4}-x^2\right)dx + \int_{1/4}^{1}\left(x^2-\frac{x}{4}\right)dx + \int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{4}\right)dx = \boxed{\ln 2-\frac{31}{192}u^2}$$

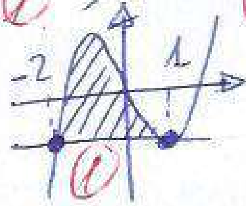
---

3 6

$y=x^3-3x$; $y'=3x^2-3$; $y'(1)=0$; $y(1)=-2 \Rightarrow \underline{r \equiv y+2=0}$

x	1	-2
y	-2	-2

$\left.\begin{array}{l} y=x^3-3x \\ y=-2 \end{array}\right\}$ $\underline{\underline{x=1,-2}}$



$$\text{Área} = \int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx = \boxed{27/4\ u^2}$$

---

4 6

$$\int\frac{2x^2-4x+1}{x(x^2-2x+1)}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{(x-1)^2}\right)dx = \boxed{\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+C}$$

---

5 6

$$\int \cos\sqrt{3x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=\sqrt{3x} \\ dt=\frac{3}{2\sqrt{3x}}dx \end{array}\right] = \int \cos t \cdot \frac{2t}{3}dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int t\cos t\,dt = \left[\begin{array}{ll} u=t & du=dt \\ dv=\cos t\,dt & v=\operatorname{sen} t \end{array}\right] = \frac{2}{3}t\operatorname{sen} t - \frac{2}{3}\int \operatorname{sen} t\,dt =$$

$$= \frac{2}{3}(t\operatorname{sen} t+\cos t) = \boxed{\frac{2}{3}\left(\sqrt{3x}\operatorname{sen}\sqrt{3x}+\cos\sqrt{3x}\right)+C}$$

MATEMÁTICAS 2º BCH-CC.NN. 2º EVALUACIÓN

3PT (1) Calcula $\int \frac{2x+1}{x^3+x}\,dx =$

2PT (2) Calcula $\int \frac{3x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx =$

3PT (3) Calcula $\int x\, Lx\, dx =$

2PT (4) Calcula el área limitada por la curva $y=-x^2+3x-2$ y el eje X

3PT (5) Halla el área del recinto plano limitado por la parábola $y=4x-x^2$ y las rectas tangentes a dicha curva en sus puntos de intersección con el eje X.

ELEGIR EL EJERCICIO 1 ó 3

SOLUCIONES

3 (1) $$\frac{2x+1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{1+x^2}+\frac{Cx}{1+x^2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}$$

$$\boxed{I=Lx+2\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}L(1+x^2)+C}$$

2 (2) $$\frac{3x+1}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{1/2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1/2}{x+1}$$

$$\boxed{I=\frac{1}{2}L|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2}L|x+1|+C}$$

3 (3) $$\int xLx\,dx=\left[\begin{array}{ll}u=x & du=dx\\ dv=Lx\,dx & v=\int Lx\,dx=\left[\begin{array}{ll}u=Lx & du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx & v=x\end{array}\right]=\end{array}\right.$$

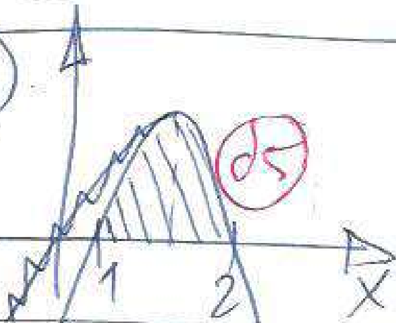
$$\left.=xLx-\int dx=xLx-x\right]=(xLx-x)x-\int(xLx-x)\,dx=x^2(Lx-1)-$$

$$-\int xLx+\int x\,dx=x^2(Lx-1)-\int xLx+\frac{x^2}{2}\Rightarrow \boxed{I=\frac{1}{2}\left(x^2(Lx-1)+\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$\frac{Lux\cdot x^2}{2}-\frac{x^2}{4}$$

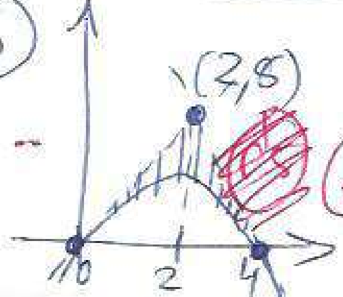
$$\left.\begin{array}{ll}u=Lx & du=\frac{1}{x}dx\\ dv=x\,dx & v=x^2/2\end{array}\right\}=\frac{x^2}{2}Lx-\int\frac{x}{2}dx=\boxed{\frac{x^2}{2}Lx-\frac{x^2}{4}+C}$$

2 (4)



$$A=\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx=\dots=\boxed{\frac{1}{6}u^2}$$

3 (5)



$$A=2\int_0^2\left[4x-(4x-x^2)\right]dx=\dots=\boxed{\frac{16}{3}u^2}$$

MATEMATICAS. BC2 — 2ª Evaluación. E3

Ejercicio 1

En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que, doblándolo convenientemente, haga con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcula la cuantía del máximo premio que se puede obtener en ese concurso.

Ejercicio 2

Considera la función siguiente $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & si \quad x\le 1 \\ ax+b & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Determina los valores de a y b para que sea derivable en todos los puntos.

b) Esboza la gráfica de la curva para los valores de $a=-2$ y $b=0$.

c) ¿Se puede aplicar a f(x) el teorema de Rolle en [0, 1]?

Ejercicio 3

En una fábrica de artículos deportivos se dispone de 10 cajas de diferente tamaño: Grandes, Medianas y Pequeñas para envasar las camisetas de atletismo producidas, con capacidad para 50, 30 y 25 camisetas respectivamente. Si una caja grande fuera mediana, entonces habría el mismo número de grandes y de medianas. En total se envasan 390 camisetas. Determina el número de cajas que hay de cada clase. Resuelve el sistema de ecuaciones por el método de Gauss.

Ejercicio 4

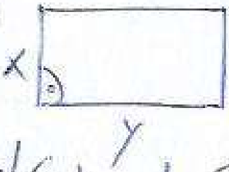
a) Estudia, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-2y-z & = & -1 \\ ax-y+z & = & 2 \\ x-2y+az & = & 3 \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema para $a=1$

= 2'5 puntos cada ejercicio=

SOLUCIONES Máxima puntuación = 40 ptos.

10 **1** 

(2) $2x+2y=2m$. (Restricción) (2) $S(x,y)=x\cdot y$ (func. a Maxim.) $\Big\}\; y=1-x$; $S(x)=x(1-x)$

$S'(x)=1-2x \overset{(1)}{=} 0 \Rightarrow x=1/2$; $S''(1/2)=-2<0 \Rightarrow \boxed{x=1/2}$ (1) $\boxed{y=1/2}$ (1)

El premio en euros es: $1/2\cdot 1/2 = 1/4\, m^2 \overset{(1)}{=} \frac{100}{4} dm^2 \Rightarrow \boxed{25\,€}$ (1)

2 $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & \text{si } x\le 1 \\ ax+b & \text{si } x>1\end{cases}$ continua si: $0=f(1)=\lim_{x\to 1^{\pm}} f(x) = a+b$ (1)

4 a)

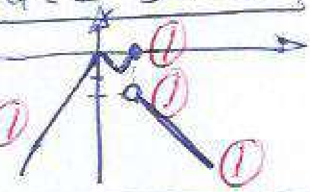
$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-2x & \text{si } x<1 \\ a & \text{si } x>1\end{cases}$ continua si: $1=f'_-(1)\overset{(1)}{=}f'_+(1)=a$

$\boxed{\text{Sol: } a \overset{(1)}{=} 1 \quad b \overset{(1)}{=} -1}$

4 b) $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & \text{si } x\le 1 \\ -2x & \text{si } x>1\end{cases}$

R1) x	y
$\pm\infty$	$\pm\infty$
1	0
0	0

R2) x	y
1	-2
2	-4

(1) 

2 c) $f(x)$ es continua (1) y derivable en $(0,1)$, con $f(0)\overset{(1)}{=}f(1)=0 \Rightarrow$ por lo tanto se puede aplicar el teorema de Rolle, $\exists\, c\in(0,1) / f'(c)=0$

10 **3** x: Nº de cajas grandes; y: Nº de cajas medianas; z: Nº de cajas pequeñas

$x\to x-1$, $y\to y+1$ $\Downarrow$ (1) $x-1=y+1$

$\begin{cases} x+y+z=10 & (2) \\ 50x+30y+25z=390 & (2) \\ x-1=y+1 & (2)\end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} x=5 \; (1) \\ y=3 \; (1) \\ z=2 \; (1)\end{matrix}}$

4 a) 7

$$A|B=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ a & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & a & 3\end{array}\right)\\ (x)\;(y)\;(z)\end{array} \to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ -2 & 1 & a & 3\end{array}\right)\\ (y)\;(x)\;(z)\end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2a-1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & a+1 & 4\end{array}\right) \; (1)$$

Si $a+1=0 \Rightarrow F3=(0,0,0|4) \Rightarrow SI$ (1)

Si $2a-1=0 \Rightarrow A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3/2 & 4\end{array}\right) \Rightarrow SI$ (1)

$\boxed{\begin{matrix}\text{Si } a=-1, 1/2 \Rightarrow SI \; (2) \\ \text{Si } a\ne -1, 1/2 \Rightarrow SCD \; (2)\end{matrix}}$

3 b) $\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ x-y+z=2 \\ x-2y+z=3\end{cases}$ $A|B=\dots=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4\end{array}\right)$ $\boxed{\begin{matrix} x=-1 \; (1) \\ y=-1 \; (1) \\ z=2 \; (1)\end{matrix}}$

MATEMATICAS. BC2 — 2ª Evaluación. E4

Ejercicio 1

3B. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$. obtén el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

(0,75 puntos el apartado a), 0,75 puntos el apartado b) y 1 punto el apartado c))

Ejercicio 2

2A. a) Dado un número real $a > 0$, calcula el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = a + 1$. (1,5 puntos)

b) Explica razonadamente que cuando a tiende a ∞, dicho área tiende a cero. (1 punto)

Ejercicio 3

3B. a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A = B - 2X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. (1,25 puntos)

b) Calcula la matriz X siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. (1,25 puntos)

Ejercicio 4

2B. Calcula la integral indefinida: $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = x + 1$) (2,5 puntos)

= 2'5 puntos cada ejercicio=

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 40 ptos.

1

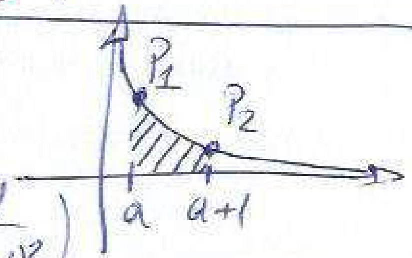
3 a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \frac{3}{10}\cdot 10 = \boxed{3}$

3 b) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ x & y & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \boxed{10}$

4 c) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}}_{0} = \boxed{10}$

2

6 a) $P_1 \equiv f(x) \cap x=a \begin{cases} y=\frac{1}{x^2} \\ x=a \end{cases} \Rightarrow P_1=\left(a,\frac{1}{a^2}\right)$



$P_2 \equiv f(x) \cap x=a+1 \equiv \begin{cases} y=\frac{1}{x^2} \\ x=a+1 \end{cases} \Rightarrow P_2=\left(a+1,\frac{1}{(a+1)^2}\right)$

$\text{Área} = \int_a^{a+1} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_a^{a+1} = \left[\frac{-1}{x}\right]_a^{a+1} = \frac{-1}{a+1} - \frac{-1}{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)}$

4 b) $\lim_{a\to\infty} A(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{\infty} = 0$ (ya que se estrecha tanto la base como la altura del recinto)

3

5 a) $X\cdot A = B - 2X \Rightarrow XA + 2X = B \Rightarrow X(A+2I) = B;\ \boxed{X = B(A+2I)^{-1}}$

5 b) $X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$

4

10 $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx = \begin{bmatrix} y = x+1 \\ dy = dx \end{bmatrix} = \int \frac{y+1}{\sqrt{y}}dy = \int \left(y\cdot y^{-1/2} + y^{-1/2}\right)dy =$

$= \int y^{1/2}dy + \int y^{-1/2}dy = \frac{y^{1/2+1}}{1/2+1} + \frac{y^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} + \frac{(x+1)^{1/2}}{1/2} =$

$= \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{(x+1)} + 2\sqrt{x+1} = \boxed{2\sqrt{x+1}\cdot\frac{x+4}{3} + C}$

MATEMATICAS. BC2 2ª Evaluación. E4

1 Determina los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el punto $(2, 8)$, tenga un mínimo relativo en $x = \sqrt{3}/3$ y además la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ tenga pendiente 4. Calcula la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

2 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, se pide:

a). Calcula A^2.

b). Resuelve la ecuación matricial $6A^{10} \cdot X = 3X + I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

3 Con las 12 monedas que tengo en el bolsillo (de 50 céntimos, de 20 céntimos y de 10 céntimos de euro) puedo comprar un pastel cuyo precio es 2,80 euros. Si una moneda de 50 céntimos lo fuera de 20, entonces el número de las de 20 céntimos y el número de las de 10 céntimos coincidiría. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase?

4 Se dispone de 1.200 m2 de chapa para construir un depósito en forma de prisma recto de base cuadrada, que no incluya la tapa superior. Halla sus dimensiones de manera que el volumen que pueda almacenar sea máximo y calcula dicho volumen.

5 Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el límite: $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - \cos(2\pi x)}{(x-1)^2}$

6 Una fábrica produce tres artículos y tiene 4 clientes. El resumen mensual de ventas de enero se anota en una matriz 4 x 3 y el precio de venta en euros de cada artículo en otra matriz 1 x 3 como las siguientes:

$$E = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = (1, 2, 10)$$

Durante el mes de febrero se han realizado las siguientes ventas:

- El primer cliente ha comprado 5 unidades del primer artículo, 2 del segundo y 3 del tercero.
- El segundo cliente, 6 unidades de cada uno.
- El tercero sólo 4 unidades del primer artículo.
- El cuarto no ha comprado nada.

a) Constrúyase la matriz de ventas F del mes de febrero.
b) Hállense las ventas conjuntas de enero y febrero.
c) Calcúlese la matriz que representa las deudas de cada cliente con la empresa en el mes de enero.
d) ¿Cuál será el ingreso total de la empresa en el mes de Enero?

SOLUCIONES Máxima puntuación = 36 ptos.

6 **1** $f(x)=ax^3+bx+c$

$P=(2,8)\in f(x) \Rightarrow 8a+2b+c=8$ (1)

$f'(\sqrt{3}/3)=0 \Rightarrow a+b=0$ (1)

$f'(1)=4 \Rightarrow 3a+b=4$ (1)

$\boxed{a=2;\ b=-2;\ c=-4}$ (1)

Recta normal en $x=1 \Rightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-4 \\ m=-1/4 \end{cases}$ (1) $\boxed{y+4=\frac{-1}{4}(x-1)}$ (1)

6 **2** a) $A^2=A^3=\dots=A^{10}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (1) (1)

$X=(6A-3I)^{-1}$ (1)

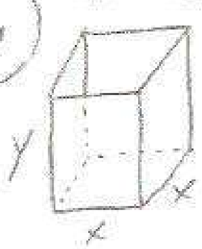
$6A-3I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1)

b) $6A^{10}X-3X=I$; $(6A-3I)X=I$. (1) $\boxed{X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ (1)

6 **3** x: Nº de monedas de 50 cent. (1)
y: " " " 20 " (1)
z: " " " 10 " (1)

$\begin{cases} x+y+z=12 \\ 0'5x+0'2y+0'1z=2'80 \\ y+1=z \end{cases}$; $\boxed{\begin{array}{l} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{array}}$ (1) (1) (1)

6 **4**



$Sup=1200\,m^2=4xy+x^2 \Rightarrow y=\frac{1200-x^2}{4x}$ (1)

$Vol=x^2\cdot y \Rightarrow V(x)=\frac{1200x-x^3}{4}$ (1); $V'(x)=\frac{1200-3x^2}{4}$

$V'(x)=0 \Rightarrow x=20$ (1); $V''(20)<0$. (1) $\boxed{x=20;\ y=10;\ V=4000\,m^3}$ (1) (1) (1)

6 **5** a) Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en (a,b) con $f(x_0)=g(x_0)=0$ (1) en $x_0\in(a,b)$ y $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (1)

b) $\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(2\pi x)}{(x-1)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'Hop}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2\pi\,\text{sen}(2\pi x)}{2(x-1)}$ (1) $=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'Hop}{=}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{2\pi^2\cos(2\pi x)}{1}$ (1) $=\boxed{2\pi^2}$ (1)

6 **6** a) $F=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1)

b) $E+F=\begin{pmatrix} 14 & 7 & 5 \\ 9 & 14 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ (1) ; c) Deudas $=\left(C\,|^{A}\right)_{4\times 3}$ (1) $\left(A\,|^{€}\right)_{3\times 1}=\boxed{\begin{pmatrix} 39 \\ 19 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}}$ (1)

$\left(C\,|^{€}\right)_{4\times 1}$

d) Ingreso $=39+19+0+30=\boxed{88€}$ (1) (1)

MATEMATICAS. BC2 2ª Evaluación. E4

(Todos los ejercicios corresponden a la prueba de 2011 en la UCLM)

Ejercicio 1

Quiero encontrar tres números enteros de manera que la suma de los dos primeros sea igual al tercero. Si al triple del primer número le resto el doble del segundo vuelvo a obtener el tercero. Si al doble del primero le resto la mitad del segundo también obtengo el tercero. Por último, si al doble del primero le resto el segundo y sumo uno, de nuevo vuelvo a obtener el tercer número.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que recoja la información anterior y clasifícalo.

b) Determina, si el problema tiene solución, cuáles son esos tres números.

Ejercicio 2

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)-x\cos(x)}{2x^3}$

Ejercicio 3

a) Clasifica, en función del parámetro m ∈ R, el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 2x-3y=-1 \\ x+2y+mz=m+3 \end{array}\right\}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para m=7.

Ejercicio 4

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Resuelve el sistema matricial $\left.\begin{array}{l} 2X+3Y=A \\ X+Y=B \end{array}\right\}$

b) Encuentra una formula general para B^n, donde n ∈ N.

Ejercicio 5 *(Elegir una de las dos opciones)*

Sea la función $f(x)=(x-a)e^x$,

OPCION A: Determina el valor del parámetro a ∈ R para que f(x) tenga un mínimo en x=0, para dicho valor de a, calcula los puntos de inflexión de f(x).

OPCION B: Esboza la grafica de f(x) para a=1, calculando previamente sus asíntotas.

= 2 puntos cada ejercicio=

SOLUCIONES (Máxima puntuación = 30 ptos.)

6 **(1)**

$$\left.\begin{array}{l} x+y=z \\ 3x-2y=z \\ 2x-\frac{y}{2}=z \\ 2x-y+1=z \end{array}\right\} \overset{(1)}{\to} \left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 3x-2y-z=0 \\ 4x-y-2z=0 \\ 2x-y-z=-1 \end{array}\right\} \to A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&0 \\ 3&-2&-1&0 \\ 4&-1&-2&0 \\ 2&-1&-1&-1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&0 \\ 0&-5&2&0 \\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0} \\ 0&-3&1&-1 \end{array}\right) (1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&-1&0 \\ 0&-5&2&0 \\ 0&0&1&5 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ -5y+2z=0 \\ z=5 \end{array}\right\} \quad \boxed{SCD}\ (1) \quad \boxed{\begin{array}{l} x=3 \ (1) \\ y=2 \ (1) \\ z=5 \ (1) \end{array}}$$

6 **(2)**

a) $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=(1^\infty)=e^{\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x-1}\left(\frac{2x+1}{x+2}-1\right)\right]} (1) = e^{\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+2}} (1) \ (1) = \boxed{e^{1/3}}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-x\cos x}{2x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'Hôp}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{6x} (1) =\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'Hôp}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} (1) =\boxed{\frac{1}{6}} (1)$$

6 **(3)**

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=1 \\ 2x-3y=-1 \\ x+2y+mz=m+3 \end{array}\right\} A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&1&1 \\ 2&-3&0&-1 \\ 1&2&m&m+3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&1&1 \\ 0&-1&-2&-3 \\ 0&3&m-1&m+2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-1&1&1 \\ 0&-1&-2&-3 \\ 0&0&m-7&m-7 \end{array}\right) (1)$$

a) $\boxed{\text{Si } m=7 \Rightarrow SCI \ (1).\ \text{Si } m\neq 7 \Rightarrow SCD \ (1)}$

b) $$\left.\begin{array}{l} x-y=1-z \\ -y=-3+2z \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l} x=4-3t \ (1) \\ y=3-2t \ (1) \\ z=t \ (1) \ \forall t\in\mathbb{R} \end{array}}$$

6 **(4)**

a) $$\left.\begin{array}{l} 2X+3Y=A \\ X+Y=B \end{array}\right\} \quad X=3B-A=\begin{pmatrix} 0&3 \\ 3&0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4&5 \\ -3&-4 \end{pmatrix} (1) =\boxed{\begin{pmatrix} -4&-2 \\ 6&4 \end{pmatrix}} (1) \quad Y=A-2B=\boxed{\begin{pmatrix} 4&3 \\ -5&-4 \end{pmatrix}} (1)$$

b) $$B=\begin{pmatrix} 0&1 \\ 1&0 \end{pmatrix} (1);\ B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}=\mathbb{I};\ \boxed{B^{2n+1}=\begin{pmatrix} 0&1 \\ 1&0 \end{pmatrix}} (1) \quad \boxed{B^{2n}=\mathbb{I}=\begin{pmatrix} 1&0 \\ 0&1 \end{pmatrix}} (1)$$

$$B^3=B^2\cdot B=\mathbb{I}\cdot B=B;\ B^4=B^3\cdot B=B^2=\mathbb{I}$$

6 **(5)**

(A) $y=(x-a)e^x$

$y'=e^x(x-a+1)$ (1)

- Si $y'(0)=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$ (1)
- Si $a=1$: $y''=e^x(1+x)$ (1)

  $y''(0)=1>0 \Rightarrow$ Es mínimo (1)
- $y''=0 \Rightarrow \boxed{x=-1 \text{ es P.I.}}$ (1)

  $y'''(-1)=e^x(2+x)\Big|_{x=-1}\neq 0$ (1)

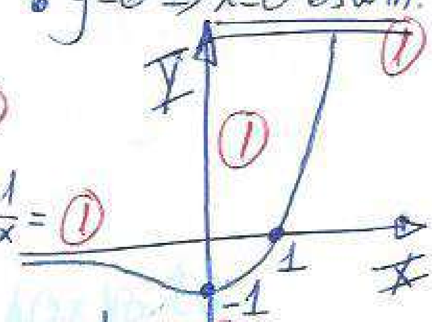
(B) $y=(x-1)e^x$; $y'=xe^x$; $y''=e^x(1+x)$

- A.V.: No tiene (1)
- $y'=0 \Rightarrow x=0$ es mín.
- A.H.: $y=0$, ya que:

  $\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^x=\infty$ (1)

  $\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}}=$ (1)

  $\overset{L'Hôp}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$ (1)
- A.O.: No tiene (1)



MATEMÁTICAS 2º BACH.-CC.NN. "B" 2ª EVALUACIÓN

2PT ① Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1PT ② Calcula $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

2PT ③ Resuelve aplicando la regla de Cramer: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x+3y-z=4 \\ -x-2y+4z=4 \end{array}\right\}$

1PT ④ Halla el rango de $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & 5 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

4PT ⑤ Discute según los valores de K y resuelve cuando sea compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l} x+Ky+Kz=1 \\ x+y+Kz=K \\ x+Ky+K^2z=K^2 \end{array}\right\}$$

3 ① $|A| = +16$ ① $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ①

---

1 ② $|\cdot| = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$ ①

---

3 ③ $x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{12}{6} = -20$; 0'5 0'5 $y = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-6}{6} = 16$ 0'5

$z = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{6}{6} = 4$ 0'5

---

1 ④ $rg(A) = 3$ ①

---

4 ⑤ $|A| = -K(K-1)^2$ ⇒ Solo esto = 0'5

- $K \neq 0, 1 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(A|B) = n \Rightarrow SCD$ 0'5
- $K = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$; $rg(A|B) = 3 \Rightarrow SI$ 0'5
- $K = 1 \Rightarrow rg(A) = 1 = rg(A|B) < n \Rightarrow SCI$ 0'5

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 - t - s \\ y &= t \\ z &= s \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$ ②

EXAMEN MATEMATICAS. BC2 RECUPERACION 2ª Evaluación

1 Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$

a. Estudiar su continuidad y derivabilidad.
b. Dibujar su gráfica.
c. Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = 5$ y el eje OX

2 Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes coordenados y la recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = r$, con $r > 0$.

Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.

3 Calcula:

$a)$ $\int_0^{\sqrt{5}} x\cdot\sqrt{1+3x^2}\,dx$ $\qquad$ $b)$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}$

4 Halla la matriz X que satisface la siguiente ecuación: $A\cdot X\cdot B + C = D$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}\ y\ D=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

5 Un distribuidor de material escolar ha clasificado 120 lápices en cajas de tres tamaños: 3 de tipo pequeño, 5 medianos y 2 grandes. Una vez clasificados han sobrado 6 lápices. Además se sabe que las cajas medianas contienen el doble de lápices que las pequeñas y las grandes el triple. ¿Qué número de lápices contiene cada caja?

SOLUCIONES Máxima puntuación = 30 ptos.

1 a) $f(x)=\begin{cases}8x-2x^2 & \text{si } x\le 4\\ 2x^2-8x & \text{si } x>4\end{cases}$; $f'(x)=\begin{cases}8-4x & \text{si } x<4\\ 4x-8 & \text{si } x>4\end{cases}$

- En $x=4$, $f(x)$ es continua ya que: $f(4)=0=\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)$
- En $x=4$, $f(x)$ no es derivable ya que: $-8=f'_-(4)\neq f'_+(4)=8$

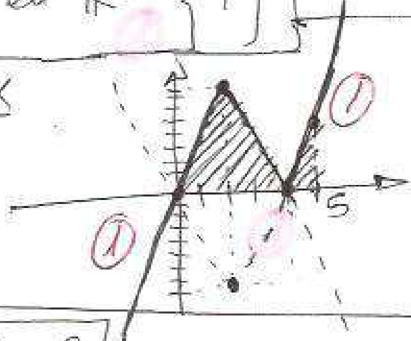
$\boxed{\text{Sol: } f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} \text{ y derivable en } \mathbb{R}-\{4\}}$

b) R1)

x	$y=8x-2x^2$
0	0
V: 2	8
4	0

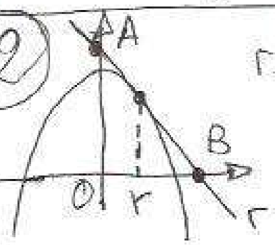
R2)

x	$y=2x^2-8x$
0	0
V: 2	-8
4	0



c) $A=\int_0^4 (8x-2x^2)\,dx+\int_4^5 (2x^2-8x)\,dx=\boxed{26\ u^2}$

2



$r\equiv\begin{cases}P=(r,4-r^2)\\ m=f'(r)=-2r\end{cases}\equiv y=-2rx+r^2+4 \Rightarrow \begin{cases}A=(0,r^2+4)\\ B=\left(\frac{r^2+4}{2r},0\right)\end{cases}$

$T(r)=\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2+4}{2r}\cdot(r^2+4)$; $T'(r)=0\Rightarrow \boxed{r=2/\sqrt{3}}$; $T''(r)>0$

3 a) $\int_0^{\sqrt5} x\sqrt{1+3x^2}\,dx=\int_0^{\sqrt5} x(1+3x^2)^{1/2}\frac{6}{6}\,dx=\frac{1}{6}\frac{(1+3x^2)^{3/2}}{3/2}\Big]_0^{\sqrt5}=\boxed{7}$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}=$ (Despreciando 4^x frente a 5^x y 3^x frente a 6^x) $=\lim_{x\to\infty}\frac{5^x}{6^x}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$

4 $X=A^{-1}(D-C)B^{-1}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$; $D-C=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

$\boxed{X=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\3&0&2\end{pmatrix}}$

5 x: Número de lápices en la pequeña
y: " " " " " mediana
z: " " " " " grande

En las cajas solo caben 114 lápices porque sobran 6

$\begin{cases}3x+5y+2z=114\\ y=2x\\ z=3x\end{cases}$

$\boxed{\text{Sol: } x=6;\ y=12;\ z=18 \text{ lápices por caja}}$

MATEMATICAS. BC2 Recuperación 2ª Eval. R2

(Todos los ejercicios corresponden a la prueba de 2010 en la UCLM)

Ejercicio 1

Dada la función $f(x) = arctg(\sqrt{x-1})$ definida para $x \geq 1$, se pide:

a) Calcula y simplifica $f'(x)$

b) Explica razonadamente por qué en ningún punto de la gráfica de f(x) la recta tangente es horizontal.

Ejercicio 2

Calcula $a \in R$, siendo a > 0, para que el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = 6x^2$, el eje de abscisas y la recta x = a, sea 2000 u^2

Ejercicio 3

Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10$, obtén el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

Ejercicio 4

El espacio e(t) recorrido por una partícula, medido en metros (m), está determinado en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos (sg), por la expresión $e(t) = At^2 + B\ln(t+1) + C$. Se pide:

a) Determina las coeficientes $A, B, C \in R$ sabiendo que en el instante t=0 la partícula ha recorrido 6 m, la velocidad inicial en t=0 es 8 m/sg y la aceleración en t=1 sg es 2 m/sg^2.

b) Para los valores A = B = C = 1, calcula $\lim_{t \to \infty} \frac{e(t)}{t^2}$

(**NOTA:** ln representa el logaritmo neperiano. Recuerda además que la velocidad es la derivada primera del espacio respecto al tiempo y la aceleración es la derivada segunda)

Ejercicio 5

Dada la ecuación matricial X · A = B − 2 · X, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3:

a) Despeja X

b) Calcula X siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6 *(Elegir una de las dos opciones)*

Calcula la integral indefinida: **OPCION A:** $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx$ **OPCION B:** $\int \frac{1}{x^3 + x^2} dx$

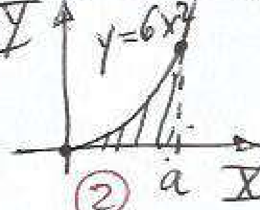
= Todos los ejercicios puntúan igual =

soluciones Máxima puntuación = 60 ptos.

10 (1) a) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$; $y' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{1+\left(\sqrt{x-1}\right)^2} = \boxed{\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}}$ b) Porque $\nexists x / f'(x) = 0$

10 (2)

x	0 (vértice)	-1	1
$y=6x^2$	0	6	6



$$\text{Área} = \int_0^a 6x^2\,dx = 6\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = 2x^3\Big|_0^a = 2a^3 = 2000 \quad \boxed{a=10}$$

(3) 3 a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \frac{3}{10}\cdot 10 = \frac{30}{10} = \boxed{3}$

3 b) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ y & x & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ x & y & z \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\left(-\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}\right) = +\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \boxed{10}$

4 c) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 0 = \boxed{10}$

(4) $e(t) = At^2 + B\ln(t+1) + C$; $v(t) = \dfrac{de}{dt} = 2At + \dfrac{B}{t+1}$; $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = 2A - \dfrac{B}{(t+1)^2}$

5 a) $e(0)=6 \Rightarrow \boxed{C=6}$; $v(0)=8 \Rightarrow \boxed{B=8}$; $a(1)=2 \Rightarrow \boxed{A=2}$

5 b) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e(t)}{t^2} = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2+\ln(t+1)+1}{t^2} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{\ln(t+1)}{t^2}+\dfrac{1}{t^2}\right) = 1+0+0 = \boxed{1}$

(5) 4 a) $X\cdot A + 2\cdot X = B \Rightarrow X\cdot(A+2I) = B \Rightarrow \boxed{X = B\cdot(A+2I)^{-1}}$

6 b) $A+2I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $(A+2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -11 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 13 & -6 & -35 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10 (6) a) $\displaystyle\int\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[\begin{array}{l} x+1=t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right] = \int\frac{t^2+1}{t}\,2t\,dt = 2\int(t^2+1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 + 2\sqrt{x+1} = \boxed{\frac{2}{3}(4+x)\sqrt{x+1}+C}$

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+x^2} = \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \boxed{-\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C}$

$\dfrac{1}{x^3+x^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$

MATEMATICAS. BC2 — Recuperación 2ª Evaluación

1B. Dada la función definida por $f(x) = \begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$, se pide:

a) Halla su expresión polinómica simplificada calculando el determinante. (0,5 puntos)

b) Calcula las coordenadas de su punto de inflexión y los intervalos en donde sea cóncava hacia arriba ($\cup$) y cóncava hacia abajo ($\cap$). (2 puntos)

2B. a) Enuncia la fórmula de integración por partes. (0,5 puntos)

b) Calcula la integral indefinida: $\int x \, Ln\, x \, dx$.

Nota: $Ln\, x$ representa el logaritmo neperiano de x. (2 puntos)

3B. a) Clasifica en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y + \lambda z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = -3$. (1 punto)

4B. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) ¿Para qué valores $\lambda \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de M? (1 punto)

b) Para $\lambda = 0$ resuelve, si es posible, la ecuación $X \cdot M = 2F$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3. (1,5 puntos)

= 2'5 puntos cada ejercicio=

SOLUCIONES

Máxima puntuación = 20 pts.

---

1 a) $f(x)=\begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ -3x^2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3x^2 & 1 \\ -1 & x-6 \end{vmatrix} = \underline{3x^3-18x^2-1}$

b) $f(x)=3x^3-18x^2-1$; $f'(x)=9x^2-36x$; $f''(x)=18x-36$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=2$; $f'''(x=2)=18\neq 0 \Rightarrow \boxed{P(2,-49) \text{ es PI.}}$

Si $x=0 \Rightarrow f''(0)<0$

Si $x=3 \Rightarrow f''(3)>0 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ es } \cup \text{ si } x\in(2,\infty) \\ f(x) \text{ es } \cap \text{ si } x\in(-\infty,2) \end{array}}$

$x=2$

---

2 a) Ver Teoría.

b) $\int x \ln x \, dx = \left[\begin{array}{ll} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx & v=x^2/2 \end{array}\right] =$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \boxed{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + K}$

---

3 a) $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right)$; $|A| = 5\lambda-10$ $(=0 \Rightarrow \lambda=2)$

* Si $\lambda=2 \Rightarrow A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right)$. $Rg(A)=2$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0$

$Rg(A|B)=3$, ya que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 10 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \boxed{2=Rg(A)\neq Rg(A|B)=3 \Rightarrow SI}$

* Si $\lambda\neq 2 \Rightarrow \boxed{Rg(A)=Rg(A|B)=3=\text{nº incógnitas} \Rightarrow SCD}$

b) Para $\lambda=-3 \Rightarrow x=\frac{1}{-25}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $y=2$; $z=2$

---

4 a) $\nexists M^{-1}$ si $|M|=0 \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \underline{\lambda^2+3\lambda+2}$

$\boxed{\exists M^{-1} \text{ si } \lambda\neq -1,-2}$

b) Si $\lambda=0 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $X\cdot M = 2F \Rightarrow X=2FM^{-1}$

$M^{-1}=\frac{[Adj(M)]^t}{|M|} = \dots = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -12 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & -4 \\ -9 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$