1ª Evaluación
BC2
Examen E1

Examen Matemáticas –TEMA 7. Límites y Continuidad

NOMBRE:

NOTA

(3 ptos.) ***EJERCICIO 1***

a) Enuncie el *teorema de Bolzano.*

b) Demuestre que alguna de las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ es negativa.

c) Demuestre que $P(x)$ tiene también alguna raíz positiva.

(1 pto.) ***EJERCICIO 2***

Demuestra que la ecuación $e^x = -2x^2 + 2$ tiene alguna solución real.

(1 ptos.) ***EJERCICIO 3***

Una función $f(x)$ está dada por la expresión $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3}$ si $x \neq 3$. ¿Cuál debe ser el valor de $f(3)$ para que la función sea continua en ese punto?

¿Quedaría algún otro punto de discontinuidad? ¿De qué tipo?

(2 ptos.) ***EJERCICIO 4***

Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ -2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ sea continua en todo R. Represéntala.

(3 ptos.) ***EJERCICIO 5***

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0}(1 - x)^{1/x} =$ b) $\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt{x - 1} - \sqrt{x^2 - x}) =$ c) $\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - x}) =$

SOLUCIONES Máxima puntuación = 50 ptos.

---

15 ① a) Ver teoría ⑤ { b) y c) Sea $f(x) = x^4 - 8x - 1$, ① función continua ① en el intervalo $[-1, 0]$ ① al tratarse de un polinomio con $\text{sign}\, f(-1) \neq \text{sign}\, f(0)$ ①, por lo que según el teorema de Bolzano ① $\exists c \in (-1, 0)$ ① tal que $f(c) = 0$ y por tanto $x^4 - 8x - 1 = 0$ en $x = c < 0$

Lo mismo ocurre ③ en el intervalo $[2, 3]$ ①, con $c > 0$

---

5 ② Sea $h(x) = e^x + 2x^2 - 2$ ①, es una función continua en el intervalo $[0, 1]$ ① al tratarse de funciones continuas ①, además es $\text{sign}\, f(0) \neq \text{sign}\, f(1)$, por lo que se puede aplicar el teorema de Bolzano ①, y por tanto $\exists c \in (0, 1)$ ① / $f(c) = 0$ y entonces $e^x = -2x^2 + 2$ tiene solución real en $x = c \in (0, 1)$

---

5 ③ Ha de ser $f(3) \overset{①}{=} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3} \overset{①}{=} \dots = \boxed{\dfrac{4}{7}}$ ①

$\boxed{f(x) \text{ no será continua si } 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1/2 \text{ (Salto } \infty)}}$ ① ①

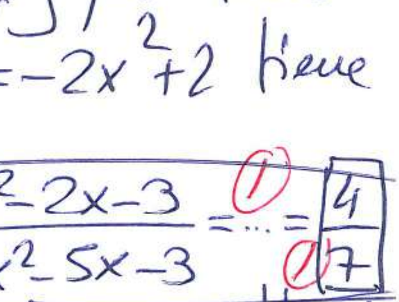
---

10 ④ $f(x)$ es continua ① en todo $\mathbb{R}$ al tratarse de polinomios, salvo si acaso en $x = 1$ y en $x = 3$. ① $\boxed{a = -1, b = 1}$ ① ①

- En $x = 1$: $a + b \overset{①}{=} f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1) \overset{①}{=} \lim\limits_{x \to 1^+} (ax + b) \Rightarrow \underline{\underline{a + b = 0}}$
- En $x = 3$: $3a + b \overset{①}{=} f(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} (ax + b) \overset{①}{=} \lim\limits_{x \to 3^+} (-2) \Rightarrow \underline{\underline{3a + b = -2}}$

---

15 ⑤ a) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - x)^{1/x} = (1^\infty) \overset{①}{=} e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}(1 - x - 1)} \overset{①}{=}$
$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}(-x)} \overset{①}{=} e^{\lim\limits_{x \to 0} -x/x}$ ① $= \boxed{e^{-1}}$ ①



⑤ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x - 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(x^{1/2} - x\right) = \boxed{-\infty}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1 - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - x}}$ ① ① $= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - 1}{2x}$ ① ① $= \boxed{\dfrac{1}{2}}$ ①

1ª Evaluación

BC2

Examen E2

Examen Matemáticas –TEMA 7, 8 y 9. Continuidad y Derivabilidad

NOMBRE:

NOTA

(3 ptos.) *EJERCICIO 1*

a) Enuncie el *teorema de Bolzano*.

b) Utilizando el *teorema de Bolzano*, encuentre un intervalo de la recta real en el que la función polinómica $p(x) = 3x^3 - x + 1$ tenga alguna raíz.

c) Utilizando el *teorema de Bolzano*, demuestre que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x + \ln(1 + x^2)$ y $g(x) = e^x + 1$ se cortan en algún punto.

(1 pto.) *EJERCICIO 2*

Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - cos(2\pi x)}{(x-1)^2}$$

(1 ptos.) *EJERCICIO 3*

Determinar una recta tangente a la parábola $y = 2 - x^2$ que sea paralela a la recta de ecuación $2x + y = 4$.

(2 ptos.) *EJERCICIO 4*

Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.

(3 ptos.) *EJERCICIO 5*

a) Estudie los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

b) Estudie si la recta r de ecuación $y = -x - 1 + \ln 2$ es tangente a la gráfica de $f(x) = \ln(1 + x^2)$ en algún punto de inflexión de $f(x)$.

SOLUCIONES Máxima puntuación = 50 ptos.

5 ① a) Ver teoría ⑤ | b) $f(x)=3x^3-x+1$ es una función continua en $[-1,0]$ ① al tratarse de un polinomio, además sign $f(-1)$ ① $\neq$ ① sign $f(0)$, por lo que $\exists c\in(-1,0)$ tal que $f(c)=0$ y por tanto $f(x)$ ① tiene alguna raíz.

5 c) Sea $h(x) \overset{①}{=} f(x)-g(x)=\ln(1+x^2)-1$, que cumple el teorema de Bolzano ① $\Rightarrow \exists c\in(0,2)$ ① / $h(x)=0 \Rightarrow f(x)=g(x)$ ①

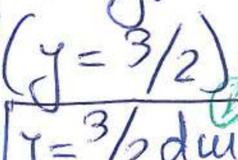
5 ② a) Ver teoría ② | b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\cos(2\pi x)}{(x-1)^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\underset{\text{L'Hop}}{\overset{①}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\pi\operatorname{sen}(2\pi x)}{2(x-1)}$ ①

$=\left(\dfrac{0}{0}\right)\underset{\text{L'Hop}}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4\pi^2\cos(2\pi x)}{2}=\boxed{2\pi^2}$ ①

5 ③ $RT\equiv\begin{cases}P\in y=2-x^2\\ m=f'(x)=-2\end{cases}$ ① $f'(x)=-2x=-2\Rightarrow x=1$ ① $\to$ $y=1$ ①

$\boxed{RT\equiv y-1=-2(x-1)}$ ① ①

10 ④



F. Opt: $\text{Area}(x,y)=2(2y\cdot y+x\cdot y+2y\cdot x)\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Area}(x,y)\overset{②}{=}4y^2+6yx\Rightarrow$

Restricción: Volumen = 9 litros = $9\,dm^3=x\cdot y\cdot 2y\Rightarrow x=\dfrac{9}{2y^2}$ ②

$\Rightarrow A(y)=4y^2+\dfrac{27}{y}\Rightarrow A'(y)\overset{②}{=}8y-\dfrac{27}{y^2}=0\Rightarrow y=3/2$

$A''(y=3/2)=8+\dfrac{54}{y^3}\Big|_{y=3/2}>0 \Rightarrow y=3/2$ es mínimo ① ①

Si $\boxed{y=3/2\,dm\Rightarrow x=2dm,\ z=3dm}$ ①

10 ⑤ a) $f(x)=\ln(1+x^2)$; $f'(x)\overset{①}{=}\dfrac{2x}{1+x^2}$; $f''(x)\overset{①}{=}\dfrac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2}$

$f'(x)\overset{①}{=}0\Rightarrow x\overset{①}{=}0$, $f''(x=0)=2>0\Rightarrow$ ① $\boxed{x=0 \text{ es mínimo}}$

$f''(x)\overset{①}{=}0\Rightarrow x\overset{①}{=}\pm1$, $f'''(x=\pm1)\overset{①}{\neq}0\Rightarrow$ $\boxed{x=1,\ x=-1 \text{ son P.I}}$ ①

5 b) $m(y=-x-1+\ln2)=-1$ ① $\to$ Si $x=-1$ ① $\Rightarrow y=\ln2$

$m_{RT}(x=1)=1$; $m_{RT}(x=-1)=-1$; $RT\equiv y-\ln2=-(x+1)$

(NO ES) ① (PUEDE SER) ① $\boxed{(\text{SÍ ES})}$ ①

1ª Evaluación
BC2
Examen de
DERIVADAS

Examen Matemáticas – DERIVADAS

NOMBRE:

NOTA

(8 ptos.) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=x^3\cdot\ln x$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+x}{2x-1}$

3) $f(x) = (x^2 - sen\,x)^{1-\ln(x)}$

4) $f(x) = arctg(1-e^{2x})$

5) $y=\sqrt{\cos x - sen\,x}$

6) $y=\ln\left[\dfrac{x-3}{x+3}\right]$

7) $y=(x^2+3x)\cdot e^{-2x+1}$

8) $y=\left(2x-\sqrt{x}\right)^2$

(2 ptos.) Calcula la derivada de la siguiente función implícita en el punto de abscisa x = 0

9) $2e^y - e^{x\cdot sen(y)} = 1 - x$

SOLUCIONES

Máxima puntuación = 30 ptos.

3 ① $f'(x) = 3x^2\,\text{①}\,\ln x \overset{\text{①}}{+} x^3\,\text{①}\,\frac{1}{x} = 3x^2\ln x + x^2$

3 ② $g'(x) = \frac{(2x+1)\,\text{①}\,(2x-1)-(x^2+x)\cdot\text{①}\,2}{(2x-1)^2\,\text{①}}$

3 ③ $f'(x) = (1-\ln x)(x^2-\operatorname{sen}x)^{-\ln x}\,\text{①}\cdot(2x-\cos x) +$

$\text{①} + (x^2-\operatorname{sen}x)^{1-\ln x}\cdot\ln(x^2 \overset{\text{①}}{-} \operatorname{sen}x)\cdot\left(\frac{-1}{x}\right)$

3 ④ $f'(x) = \frac{1}{1+(1-e^{2x}\,\text{①})^2}\cdot(-2\,\text{①}\,e^{2x}\,\text{①})$

3 ⑤ $y' = \frac{\text{①}\;1}{2\sqrt{\cos x-\operatorname{sen}x}}(-\operatorname{sen}x\,\text{①} - \cos x\,\text{①})$

3 ⑥ $y' = \frac{1}{\text{①}\,\frac{x-3}{x+3}}\cdot\frac{(x+3)\overset{\text{①}}{-}(x-3)}{(x+3)^2\,\text{①}} = \frac{6}{x^2-9}$

3 ⑦ $y' = (2x+3)e^{-2x+1}\,\text{①} \overset{\text{①}}{+} (x^2+3x)e^{-2x+1}\,\text{①}\cdot(-2)$

3 ⑧ $y' = 2\,\text{①}\,(2x-\sqrt{x}\,\text{①})\left(2 \,\text{①}\, -\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

6 ⑨ $2e^y - e^{x\operatorname{sen}y} = 1-x \Rightarrow$ Si $x=0 \Rightarrow y=0$ ①

$2e^y\,\text{①}\cdot y' - e^{x\operatorname{sen}y}\cdot(\operatorname{sen}y \overset{\text{①}}{+} x\cos y\, y') = -1$ ①

Si $x=0,\ y=0 \Rightarrow 2y' - 1\cdot(0 \underset{\text{①}}{+} 0) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y'(0) = \frac{-1}{2}}$ ①

Recuperación
1ª Evaluación
BC2

Examen Matemáticas –TEMA 7, 8, 9 y 10: Continuidad y Derivabilidad

NOMBRE:

NOTA

(2 ptos.) *EJERCICIO 1*

Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si} \quad x < 0 \\ a + b\sin x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función $f(x)$ es continua y derivable en $x = 0$.

(2 ptos.) *EJERCICIO 2*

De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

(4 ptos.) *EJERCICIO 3*

a) Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{e^x}$,

b) Calcule sus asíntotas.

c) Realice un esbozo de la gráfica de la función.

d) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} \right)$

(2 ptos.) *EJERCICIO 4*

Considere la función $f(x) = x\sqrt{18 - x^2}$

a) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.

b) Justifique si tiene algún máximo o mínimo a través del estudio de su crecimiento.

SOLUCIONES

Máxima puntuación = 40 ptos.

---

8 ① f(x) es continua en todo ① $\mathbb{R}$ salvo si acaso en $x = 0$ (al estar formada por funciones continuas).

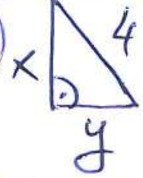
También es derivable ① en los mismos ptos. por mismos motivos

En $x=0$: $\exists f(0) \overset{①}{=} a = \lim_{x\to 0^+}(a + b\,\text{sen}\,x) = \lim_{x\to 0^-} e^{ax}$ ① $= 1 \Rightarrow \boxed{a=1}$ ①

$f'(x) = \begin{cases} a e^{ax} & \text{si } x<0 \\ b\cos x & \text{si } x>0 \end{cases}$ ①; $a = f'_-(0) \overset{①}{=} f'_+(0) = b \Rightarrow \boxed{b=1}$ ①

---

8 ②



F. obj: $A(x,y) = \frac{xy}{2}$ ① $y = \sqrt{16-x^2}$; $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2}$ ①

Restricc: $4^2 = x^2 + y^2$ ① $A'(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{16-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\right]$ ① ①

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -\sqrt{8} \text{ (No vale) ①} \\ ① +\sqrt{8} \Rightarrow A''(x=\sqrt{8}) < 0 \Rightarrow \end{cases}$ $\boxed{x=\sqrt{8} \text{ Máximo}}$ $\boxed{\text{Area} = 4\ u^2}$ ①

---

③ $f(x) = \frac{x^2+2x}{e^x}$; $f'(x) \overset{①}{=} \frac{2-x^2}{e^x}$; $f''(x) \overset{①}{=} \frac{x^2-2x-2}{e^x}$

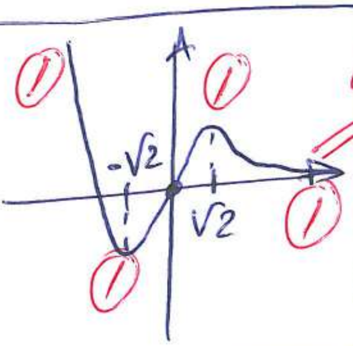
4 a) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} +\sqrt{2} \Rightarrow f''(\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow \boxed{x=+\sqrt{2} \text{ es Máx}} \\ -\sqrt{2} \Rightarrow f''(-\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow \boxed{x=-\sqrt{2} \text{ es mín.}} \end{cases}$ ① ①

4 b) **A.H**: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) \overset{①}{=} \infty \Rightarrow \boxed{y=0 \text{ es A.H. cuando } x\to+\infty}$ ①

A.V.: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ ① $\boxed{\text{No tiene A.V.}}$; **A.O**: $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ ($\nexists m \neq 0$) ① $\boxed{\text{No tiene A.O.}}$

4 c)

x	y
$\sqrt{2}$	Máximo
$-\sqrt{2}$	mínimo
$+\infty$	0 (A.H.)
$-\infty$	∞
0	0



4 d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = (\infty - \infty) \overset{①}{=}$
$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$ ① $= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hop.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x-1-xe^x}$
$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}$ ① $= \frac{1}{1+1+0}$ ① $= \boxed{1/2}$

---

④ 4 a) $f'(x) = \sqrt{18-x^2}$ ① $- \frac{x^2}{\sqrt{18-x^2}}$ ① $= 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 3 \text{ candidatos}}$ ②

4 b) ⊖ ① ⊕ ① ⊖ $\mathbb{R}$

-3 3

$\begin{pmatrix} x=-4 \\ f'<0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x=0 \\ f'>0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x=4 \\ f'<0 \end{pmatrix}$

En $x = -3$ hay un mínimo ①

En $x = +3$ hay un Máximo ①

BC2

1ª Evaluación

Examen Matemáticas –TEMAS 7, 8 y 9. Continuidad y Derivadas

NOMBRE:

NOTA

(2 ptos.)*EJERCICIO 1*

Determina los valores de a y b para los cuales la función f(x) definida como sigue es continua y derivable en x = 0

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si} \quad x < 0 \\ a + b \sin x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(2 ptos.)*EJERCICIO 2*

a) Enuncia el teorema de Rolle.

b) Prueba que la función f(x) = $x^4 - 2x^3 + x + 3$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo [0, 1]

(2 ptos.)*EJERCICIO 3*

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(3 + x) - \ln(3 - x)}{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 2})$

(2 ptos.)*EJERCICIO 4*

Calcula los extremos relativos (máximos y mínimos) y los intervalos de crecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$$

(2 ptos.)*EJERCICIO 5*

Se considera el triángulo isósceles de la figura, cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura sobre ese lado es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base, de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triangulo sea mínima, ¿qué valor debe tener x?

SOLUCIONES

Máxima puntuación = 40 ptos.

---

8 (1) a) Continuidad en $x=0$: i) $\exists f(0)$ ① $= a + b \operatorname{sen} 0 = a$

ii) $1 = \lim_{x\to 0^-} e^{ax}$ ① $= \lim_{x\to 0^+}(a + b \operatorname{sen} x) = a$; iii) $f(0)$ ① $= \lim_{x\to 0} f(x)$

① $\boxed{a=1}$

b) Derivabilidad en $x=0$: $f'_-(0)$ ① $= f'_+(0)$

$f'(x) =$ ① $\begin{cases} a e^{ax} & \text{si } x<0 \\ b\cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a$ ① $= b \Rightarrow \boxed{b=1}$ ①

---

8 (2) a) Ver ② teoría | b) $f(x)$ es continua ① y derivable ① en todo $\mathbb{R}$, al ser un polinomio ①, además $f(0) = f(1)$ ①

x	0	1
$f(x)$	3	3

, por lo tanto ① de acuerdo con el teorema de Rolle $\exists c \in (0,1) / f'(c) = 0$, siendo un ① extremo relativo

---

4 (3) a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(3+x) - \ln(3-x)}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$ ① $\overset{\text{L'HOP.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x}}{2}$ ①

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$ ①

4 b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) = (\infty$ ① $- \infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})}$ ①

$= \lim_{x\to\infty}$ ① $\frac{x+1-(x+2)}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \boxed{0}$ ①

---

8 (4) $f(x) = \frac{x^2+2x}{e^x}$; $f'(x) =$ ① $\frac{(2x+2)\cancel{e^x} - (x^2+2x)\cancel{e^x}}{e^{\cancel{2x}}}$ ① $= \frac{-x^2+2}{e^x}$,

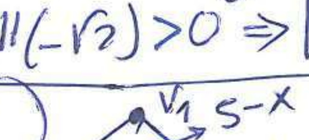
$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2+2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ candidatos a Max, min.

$f''(x) = \frac{x^2-2x-2}{e^x}$ ① $\Rightarrow f''(+\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = +\sqrt{2} \text{ es Máximo}}$ ①

$f''(-\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow$ ① $\boxed{x = -\sqrt{2} \text{ es mínimo}}$ | $\boxed{f(x) \text{ crece } \forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})}$ ③

---

8 (5)



$f(x) = 5 - x$ ① $+ \sqrt{x^2+36}$ ① $+ \sqrt{x^2+36}$ ① $= 5 - x + 2\sqrt{x^2+36}$

$f'(x) =$ ① $-1 + 2\frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}$

$\sqrt{x^2+36} = 2x \Rightarrow x =$ ② $\begin{cases} +\sqrt{12} \Rightarrow \text{Es mínimo ya que } f''(\sqrt{12}) > 0 \\ -\sqrt{12} < 0 \Rightarrow \text{NO} \end{cases}$ $\boxed{\text{Sol: } x = +\sqrt{12}}$ ① ①

Recuperación
BC2
1ª Evaluación

Examen Matemáticas – Recuperación 1ª Evaluación

NOMBRE:

NOTA

(2 ptos.) *EJERCICIO 1*

a) Determina los valores de a y b para los cuales la función f(x) es continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 0 \\ a + bx & si\ 0 < x \leq 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

b) ¿Se puede aplicar el terorema de Rolle en el intervalo [–1, 3] para a = b = 1?

.**(2 ptos.)** *EJERCICIO 2*

El coste de producir x unidades de un determinado producto viene dado por la siguiente expresión $C(x) = x^2 - 300x + 100$ y el precio de venta de una unidad por V(x)=1000 – x. ¿Cuántas unidades se deben vender para que el beneficio sea máximo?

(2 ptos.) *EJERCICIO 3*

Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} =$

(4 ptos.) *EJERCICIO 4*

Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^4}$

a) Hallas las ecuaciones de sus asíntotas

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento

c) Halla la ecuación de la recta normal en el punto de abscisa x = 1

d) Esboza la gráfica de f(x)

SOLUCIONES Máxima puntuación = 60 ptos.

---

① a) f(x) será continua en todo ℝ, salvo ① si ① acaso, en $x=0$ y $x=1$, al tratarse de polinomios. Veamos:

6

- En $x=0 \Rightarrow$ ① $\exists f(0)=0$. $0=\lim_{x\to 0^-} x^2=\lim_{x\to 0^+}(a+bx)=a$
- En $x=1 \Rightarrow$ ① $\exists f(1)=a+b$, $a+b=\lim_{x\to 1^-}(a+bx)=\lim_{x\to 1^+} 1 = 1$

f(x) es continua si $\begin{cases} a=0 \\ a+b=1 \end{cases}$; es decir: $\boxed{a=0 ①;\ b=1 ①}$

6

b) Si $a=b=1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ 1+x & 0<x\le 1 \\ 1 & x>1. \end{cases}$ Para que se pueda aplicar el teorema ① de Rolle f(x) debe ser ① continua en $[-1,3]$, derivable en $(-1,3)$ y ser $f(-1)$ ① $=f(3)$. Pero f(x) no es continua ni en $x=0$ ①, ni en $x=1$ ①, $\boxed{\text{No se puede aplicar}}$ ①

---

② Beneficio ② $= x\cdot V(x)-C(x)=x(1000-x)-(x^2-300x+100)$ ②

12

$B(x)=$ ② $-2x^2+1300x-100$; $B'(x)=$ ② $-4x+1300=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=325}}$

$B''(x)=$ ② $-4<0 \Rightarrow \boxed{x=325 \text{ es ② un máximo de } B(x)}$

---

③ a) $\boxed{\text{Ver ④ Teoría}}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'Hop ①}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2(e^x-1)e^x}$ ② $=$ ②

12

$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2e^x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{e^x-1}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{e^x-1}\overset{L'Hop}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}$ ② $\frac{\cos x}{e^x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\boxed{\frac{1}{2}}$ ①

---

④ a) **A.H.** $y_0=\lim_{x\to\pm\infty}$ ① $\frac{x^2-2}{x^4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow$ ① $\boxed{y=0 \text{ es A.H.}}$

6

A.V.: $Dom(f)=\mathbb{R}-$ ① $\{0\}$; $\lim_{x\to 0^\pm}\frac{x^2-2}{x^4}=\frac{-2}{0^+}=-\infty \Rightarrow \boxed{x=0 \text{ es A.V.}}$ ①

A.O. Al tener A.H. ① y ser una función racional $\boxed{\text{no tiene A.O.}}$ ①

6

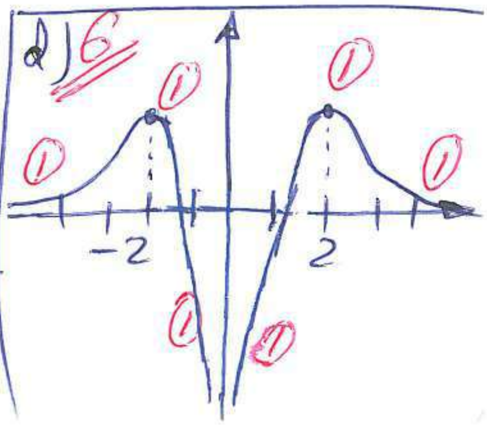
b) $y=\frac{x^2-2}{x^4}$; y' ① $=\frac{-2x^2+8}{x^5}=0 \Rightarrow -2x^2+8=0 \Rightarrow x$ ① $=\pm 2$

$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ CRECE } \forall x\in(-\infty,-2)\cup(0,2) \text{ ②} \\ f(x) \text{ DECRECE } \forall x\in(-2,0)\cup(2,\infty) \text{ ②} \end{array}}$

6

c) $RN \equiv \begin{cases} P=(1,-1) \text{ ②} \\ m=-1/f'(1)=\frac{-1}{6} \text{ ②} \end{cases}$ $\boxed{y+1=\frac{-1}{6}(x-1)}$ ②

d) 6



B2Fís

1ª Evaluación

Examen Matemáticas –TEMAS 7 y 8. Continuidad y Derivabilidad

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	1	30%	
B3-1.2	Derivadas y teoremas asociados	2, 3, 4 y 5	40%	
B3-2.1	Uso de la regla de L'Hôpital	6 y 7	30%	

(3 ptos.)*EJERCICIO 1*

Considere la función definida a partir de los parámetros α, $\beta \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + \alpha & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + \beta x + \beta + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Obtenga la relación que debe haber entre α y β para que f sea continua en $x = 0$.

b) Calcule α y β para que f sea derivable en $x = 0$.

c) Para los valores α y β obtenidos en el apartado (b), ¿es f' derivable en $x = 0$? Razone la respuesta.

(1 pto.) *EJERCICIO 2*

Calcule, y simplifique en lo posible, la derivada de la función

$$f(x) = \ln\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right), \qquad 0 < x < \pi$$

(1 pto.) *EJERCICIO 3*

Estudie si la recta r de ecuación $y = 4x - 2$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ en alguno de sus puntos.

(1 pto.) *EJERCICIO 4*

Enunciar el teorema de Bolzano y usarlo para probar que la ecuación $x = \cos x$ tiene solución positiva.

(1 pto.) *EJERCICIO 5*

Aplique el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $e^x = -2x^2 + 2$ tiene soluciones.

(2 ptos.)*EJERCICIO 6*

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)^2}{e^{x^2} - 1}$$

(1 pto.) *EJERCICIO 7*

Indica, razonadamente, el valor que debe tomar a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a & si \quad x = 0 \\ \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 30 ptos

---

① $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ al estar formada por polinomios, salvo si acaso en $x=0$, veámoslo

3 a) i) $\exists f(0)=\beta+1$ ①

ii) $\lim_{x\to 0^-}(x^2-3x+\alpha)=\alpha$ ①

$\lim_{x\to 0^+}(-x^2+\beta x+\beta+1)=\beta+1$

iii) $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow \boxed{\beta+1=\alpha}$ ①

3 b) $f'(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } x<0\\ -2x+\beta & \text{si } x>0\end{cases}$ ①

$f(x)$ es derivable en $x=0$ si es continua y $f'_-(0)=f'_+(0) \Rightarrow \beta=-3$ ① ①

$\boxed{\text{Sol: } f(x) \text{ cont. y deriv. si: } \alpha=-2,\ \beta=-3}$ ①

3 c) $f'(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } x<0\\ -2x-3 & \text{si } x\geq 0\end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<0\\ -2 & \text{si } x>0\end{cases}$ ① Como $f''_-(0)\neq f''_+(0)$ ① $f'(x)$ no es derivable

---

3 ② $y=\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) \Rightarrow y'=\frac{1}{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ ① $\cdot \frac{\operatorname{sen} x(1+\cos x)+(1-\cos x)\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$ ① $=$

$=\frac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{2\operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x}=\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}=$ ① $\boxed{\frac{2}{\operatorname{sen} x}}$

---

3 ③ Para que $y=4x-2$ sea tangente a $f(x)=x^3+x^2-x+1$ en algún punto, deben coincidir la pendiente ① de y con la derivada de $f(x)$, es decir: $4=3x^2+2x-1 \Rightarrow x_1=1$ ①, $x_2=-5/3$. El valor $x_1=1$ da el mismo valor de y en la recta que en $f(x)$, $x_2=-5/3$ no da el mismo. Por lo tanto $P=(x_1=1, f(1)=2)$ es el punto buscado ① $\boxed{P=(1,2)}$

---

3 ④ a) Ver teoría ① | b) Sea $f(x)=x-\cos x$, continua en $[0,\pi/2]$ ① por ser una combinación (polinomio y coseno) de funciones continuas ①, además es $f(0)\cdot f(\pi/2)<0$, por lo tanto según el teorema de Bolzano $\exists c\in(0,\pi/2)/ f(c)=0$, y por tanto $x=\cos x$ con $c>0$

---

3 ⑤ Sea $f(x)$ ① $=e^x+2x^2-2$, cont. en ① $[0,1]$, con $f(0)\cdot f(1)<0$, por el teorema de Bolzano ① $\exists c\in(0,1)/ f(c)=0$ y por tanto $e^x=-2x^2+2$

---

6 ⑥ $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'Hôp}{=}\lim_{x\to 0}$ ① $\frac{2(e^x-1)e^x}{e^{x^2}\cdot 2x}$ ① $=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{x e^{x^2}}=\left(\frac{0}{0}\right)$ ① $\overset{L'Hôp}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot 2-e^x}{e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot 2x}$ ① $=\boxed{1}$ ① ①

---

3 ⑦ $f(x)$ es continua si $f(0)=a$ ① $=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\overset{L'Hôp}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2+1}$ ① $=0 \Rightarrow \boxed{a=0}$ ①

B2Bio

1ª Evaluación

Examen Matemáticas –TEMAS 7 y 8. Continuidad y Derivabilidad

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	1	30%	
B3-1.2	Derivadas y teoremas asociados	2, 3, 4 y 5	40%	
B3-2.1	Uso de la regla de L'Hôpital	6 y 7	30%	

(3 ptos.) ***EJERCICIO 1***

Determina el valor de los parámetros a y b para que sea continua y derivable en todo R la función $f(x) = \begin{cases} ax^3 - bx^2 & \text{si } x < 1 \\ 1 - 2ax & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

¿Es $f''(x)$ derivable en $x = 1$ para los valores de a y b calculados?

(1 pto.) ***EJERCICIO 2***

Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \ln\left(\cos^2 x\right), \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

(1 pto.) ***EJERCICIO 3***

Determinar una recta tangente a la parábola $y = 2 - x^2$ que sea paralela a la recta de ecuación $2x + y = 4$.

(1 pto.) ***EJERCICIO 4***

Enunciar el teorema de Bolzano y determinar si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raiz real negativa.

(1 pto.) ***EJERCICIO 5***

Demuestra que la ecuación $e^x = -2x^2 + 2$ tiene alguna solución real.

(2 ptos.) ***EJERCICIO 6***

Calcula

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x - e^x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

(1 pto.) ***EJERCICIO 7***

Diga, razonadamente, el valor que debe tomar c para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ c & si \quad x = 0 \end{cases}$$

SOLUCIONES Máxima puntuación = 30 pts.

9 (1) $f(x)$ es continua ① y derivable en todo $\mathbb{R}$ al estar formada por polinomios, salvo si acaso en $x=1$. Veamoslo:

i) $\exists f(1)=1-2a$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^3-bx^2)=a-b$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(1-2ax)=1-2a$ ①

iii) $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x) \Rightarrow \underline{a-b=1-2a}$ ①

$f'(x)=\begin{cases}3ax^2-2bx & \text{si } x<1\\ -2a & \text{si } x>1\end{cases}$

$f(x)$ es derivable en $x=1$ si es continua y $f'_-(1)=f'_+(1) \Rightarrow \underline{3a-2b=-2a}$ ①

$\boxed{\text{Sol: } f(x) \text{ cont. y deriv. si } a=2 ①,\ b=5 ①}$

$f'(x)=\begin{cases}6x^2-10x & \text{si } x<1\\ -4 & \text{si } x\geq 1\end{cases} \Rightarrow f''(x) ① =\begin{cases}12x-10 & x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$ Como $f''_-(1) ① \neq f''_+(1)$ $\boxed{f'(x) \text{ no es derivable}}$ ①

3 (2) $f(x)=\ln(\cos^2 x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2\,\text{sen}\,x\cos x}{\cos^2 x}$ ① ① $\Rightarrow \boxed{f'(x)=-2\,\text{tg}\,x}$ ①

3 (3) $RT\equiv\begin{cases}P_0=(x_0,2-x_0^2) \xrightarrow{x_0=1} P_0=(1,1) \text{ con } m=-2 \Rightarrow \boxed{y-1=-2(x-1)} ①\\ m=m(2x+y=4)=-2 ① =f'(x_0)\Rightarrow -2x_0=-2 \Rightarrow ① \underline{x_0=1}\end{cases}$

$\Downarrow$

$\boxed{y=-2x+3}$

3 (4) a) Ver Teoría ① | b) Sea $f(x)=x^4-4x^2-1$, continua en $[-3,0]$ con $f(0)f(-3)<0$ ① por lo que se puede aplicar Bolzano y por tanto $\boxed{\exists c\in(-3,0)}$ ①

3 (5) Sea $f(x)=e^x+2x^2-2$, continua en ① $[0,1]$, ① con sign $f(0)\neq$ sign $f(1)$ por lo que se puede aplicar el teorema de Bolzano, que asegura que $\exists c\in(0,1)/f(c)=0$ y por tanto ① $e^x+2x^2-2=0$ para $\boxed{x=c\in(0,1)}$

6 (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{\text{sen}^2 x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hôp}}{=} ① \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{2\,\text{sen}\,x\cos x}$ ① ① $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{\text{sen}\,2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)\underset{\text{L'Hôp}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{2\cos 2x}$ ① ① $=\boxed{\dfrac{-1}{2}}$ ①

Para que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ c & \text{si } x=0\end{cases}$ sea

3 (7) continua en $x=0$, ha de ser: $f(0) ① =\lim\limits_{x\to 0} f(x)=c \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right) ① \overset{\text{L'Hôp}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1 \Rightarrow \boxed{c=1}$ ①

B2Bio

1ª Evaluación

Examen Matemáticas –TEMAS 7, 8 y 9 Continuidad y Derivadas

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	1	20%	
B3-1.2	Derivadas y teoremas asociados	2 y 3	20%	
B3-2.1	Aplicaciones de las derivadas: L'Hôpital, Tangentes, Crecimiento, Curvatura, ...	4, 5 y 6	30%	
B3-2.2	Plantea problemas de optimización	7 y 8	30%	

(2 ptos.) *EJERCICIO 1*

Una función $f(x)$ está dada por la expresión $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3}$ si $x \neq 3$. ¿Cuál debe ser el valor de $f(3)$ para que la función sea continua en ese punto?

¿Quedaría algún otro punto de discontinuidad? ¿De qué tipo?

(1 pto.) *EJERCICIO 2*

Halla los valores de a y de b para que la función $f(x) = \begin{cases} bx - x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, 4]$ y determina el valor que verifica la tesis del teorema.

(1 pto.) *EJERCICIO 3*

¿Es aplicable el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^3 - 2x - 7}$ en $[2, 4]$? Justifica la respuesta. ¿Se puede asegurar que la función corta al eje de abscisas en algún punto o, por el contrario, que no lo corta en ningún punto?

(1 pto.) *EJERCICIO 4*

Obtén la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 2$. ¿Cuál es la ecuación de la tangente?

(1 pto.) *EJERCICIO 5*

La función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 4$ tiene un mínimo relativo en el punto $(2, 0)$. Determina los coeficientes b y c y estudia su monotonía.

(1 pto.) *EJERCICIO 6*

Calcula el diferencial de la función $y = f(x) = \sqrt{3x - 2}$ en $x = 9$ para un incremento de la variable $\Delta x = 0{,}2$.

(2 ptos.) *EJERCICIO 7*

Se tiene un triángulo rectángulo de hipotenusa 12 cm que, al girar alrededor de uno de sus catetos, genera un cono. Determina las dimensiones del triángulo que genera el cono de volumen máximo y el valor de dicho volumen.

(1 pto.) *EJERCICIO 8*

Calcula el valor máximo que toma la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo cerrado $[-2, 3]$. ¿Qué teorema asegura su existencia?

SOLUCIONES Máxima puntuación = 50 ptos.

10 ① a) $f(3) \overset{①}{=} \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{2x^2-5x-3} \overset{①}{=} \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to 3} \frac{2x-2}{4x-5} = \boxed{\frac{4}{7}}$ ① ① ①

b) Denominador ≠ 0 ② ⇒ En $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$ ① (1ª Especie ① salto infinito ; $\lim_{x\to -1/2} f(x) = \infty$ ①

5 ② a) f(x) debe ser continua ① en $[a,4]$ y derivable ① en $(a,4)$ y $f(a)=f(4)$: Continua si $f(2)=\lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow \underline{2b-4=2}$ $\Downarrow$

Derivable si $f'_-(2)=f'_+(2) \Rightarrow \underline{b-4=-1} \Rightarrow$ ① $\boxed{b=3}$

$f(a)=f(4)$ si: Para $a \leq 2 \Rightarrow 3a-a^2=1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \simeq 0'38$ ①

Para $2<a<4 \Rightarrow \frac{4}{a}=1 \Rightarrow a=4 \notin (2,4)$

b) $f'(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{si } x\leq 2 \\ \frac{-4}{x^2} & \text{si } x>2 \end{cases}$; $f'(c)=0$ si $\left\langle \begin{array}{l} 3-2x=0 \Rightarrow \boxed{c=\frac{3}{2}\leq 2} \\ \frac{-4}{x^2}=0 \Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R} \end{array}\right.$ ①

5 ③ f(x) no ① es continua en [2,4], ya que su denominador se anula ① en ese intervalo (por el teorema de Bolzano ① ya que es una función continua y toma valores de signo ① distinto en 2 y en 4), por lo que se anula en algún punto intermedio. No ① se puede asegurar que f(x) corte al eje de abscisas en (2, 4)

5 ④ $m \overset{①}{=} f'(2) = 4x-3\big|_{x=2} = \boxed{5}$ ① $\Rightarrow RT \equiv \begin{cases} P=(2,2) \\ m=5 \end{cases}$ ① $\Rightarrow \boxed{y-2=5(x-2)}$ ②

5 ⑤ $f(2)=0 \Rightarrow \underline{2b+c=-6}$ ① ; $f'(2)=0 \Rightarrow \underline{4b+c=-12}$ ① $\Rightarrow \boxed{\begin{cases} b=-3 \\ c=0 \end{cases}}$ ① ①

$f(x)=x^3-3x^2+4 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x$: $\boxed{\text{CRECE en } (-\infty,0)\cup(2,\infty)}$ ①

5 ⑥ $df(x) = f'(x)\,dx$ ① $= \left(\sqrt{3x-2}\right)'_{x=9} \cdot 0'2$ ① $= \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}\Big|_{x=9} \cdot 0'2$ ② $= \boxed{0'06}$ ①

10 ⑦ 

Restr: $12^2=h^2+R^2$ ② ; F. Obj: $V(h,R)=\frac{1}{3}\pi R^2 h$ ② $\Big\}$ $V(h)=\frac{1}{3}(144\pi h-\pi h^3)$, $V'=0 \Rightarrow$ ② $h=\sqrt{48}$

$V''(h=4\sqrt{3})<0$ ② $\Rightarrow$ Máximo: $R=\sqrt{96}$

Volumen $(R=\sqrt{96}, h=\sqrt{48}) = \boxed{32\pi\sqrt{48}\,cm^3}$ ②

5 ⑧ $f'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow x \overset{①}{=} \pm 1$. El teorema ① de Weierstrass asegura que existe un máximo absoluto: ②

x	-2	3	1	-1
y	-1	19	-1	3

$\boxed{x=3}$ ①

B2Fis
1ª Evaluación

Examen Matemáticas –TEMAS 7, 8 y 9 Continuidad y Derivadas

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	1	20%	
B3-1.2	Derivadas y teoremas asociados	2 y 3	20%	
B3-2.1	Aplicaciones de las derivadas: L'Hôpital, Tangentes, Crecimiento, Curvatura, ...	4, 5 y 6	30%	
B3-2.2	Plantea problemas de optimización	7 y 8	30%	

(2 ptos.) ***EJERCICIO 1***

Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ -2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ sea continua en todo R. Represéntala.

(1 pto.) ***EJERCICIO 2***

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + m & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}$

a) Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4, 2]$.

b) Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

(1 pto.) ***EJERCICIO 3***

Justifica que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[1, 2]$. Calcula con un error menor que 0,1 la solución de la ecuación anterior.

(1 pto.) ***EJERCICIO 4***

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en el punto de abscisa $x = 0$. ¿En qué punto corta esta recta al eje X?

(1 pto.) ***EJERCICIO 5***

Determina los intervalos de crecimiento de la función $f(x) = e^x \cdot x^{-2}$

(1 pto.) ***EJERCICIO 6***

Teniendo en cuenta que $\sqrt[3]{343} = 7$, calcula, aproximando mediante la diferencial, el valor de $\sqrt[3]{345}$.

(2 ptos.) ***EJERCICIO 7***

Se quiere construir un depósito de 8 m^3 de capacidad con forma de prisma de base cuadrada y sin tapa. El material que se utiliza para la base cuesta 15 € el m^2 mientras que el que se utiliza para las paredes cuesta 12 € el m^2. Determina las dimensiones del depósito que hay que hacer para que su coste de construcción sea mínimo.

(1 pto.) ***EJERCICIO 8***

Determine el punto (x, y) de la parábola $y = x^2$ en el que la suma $x + y$ alcanza su mínimo valor.

SOLUCIONES

Máxima puntuación = 50 ptos.

---

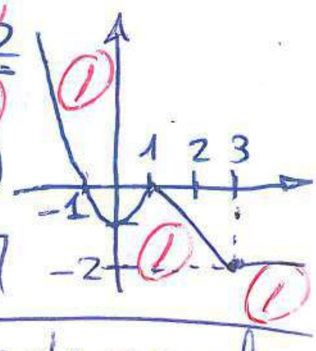
10 ① $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ al tratarse de polinomios ①, salvo si acaso en $x=1$ o en $x=3$. Veamoslo:

- En $x=1$: $\Rightarrow \underline{a+b=0}$ ①. En $x=3 \Rightarrow \underline{3a+b=-2}$ ①

i) $\exists f(1)=a+b$ ① ; ii) y iii) $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$

i) $\exists f(3)=3a+b$ ① ; ii) y iii) $f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)$

$\boxed{\text{SOL: } f(x) \text{ es continua } \forall x\in\mathbb{R} \text{ si } a=-1, \ b=1}$ ① ①



---

5 ② a) Para que $f(x)$ cumpla el TVM ① en $[-4,2]$ ha de ser continua en ese intervalo y derivable en $(-4,2)$. Es continua si: $f(-2)=\lim_{x\to -2} f(x) \Rightarrow \underline{-8+m=4-2n}$. Es derivable si: $\underline{-4+n=12}$

Se cumple el TVM si $\boxed{m=-20, \ n=16}$ ① ①

b) Al cumplir el TVM, $\exists c\in(-4,2) / f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}$ ① $c=-5\notin I$; $\boxed{c=-\sqrt{2}\in I}$; ① $\boxed{c=+\sqrt{2}\in I}$

---

5 ③ Sea $f(x)=x^3+x-5$ que cumple el ① teorema de ① Bolzano ① en el intervalo $[1,2]$ al ser un polinomio y $f(1)\cdot f(2)<0$. Para encontrar la solución ① con un error $<0'1$ probamos con ① $\boxed{c\in(1'5,1'6)}$

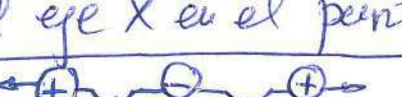
---

5 ④ $f(x)=\dfrac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$ ① ; $RT\equiv\begin{cases}P=(0,1) & ①\\ m=f'(0)=-1\end{cases} \Rightarrow \boxed{y=-x+1}$ ①

La recta tangente corta al eje X en el punto $\boxed{Q=(1,0)}$ ②

---

5 ⑤ $y=\dfrac{e^x}{x^2} \Rightarrow y'=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3} \gtrless 0$ ①



$\mathbb{R}$ $\boxed{f(x) \text{ CRECE } \forall x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)}$ ① ①

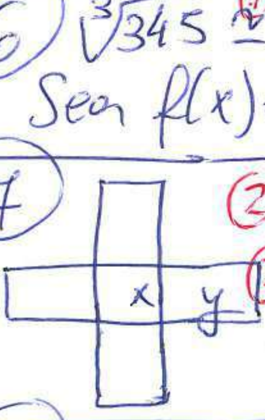
---

5 ⑥ $\sqrt[3]{345} \simeq \sqrt[3]{343}+df(x_0=343)$ ① ; $df=f'(343)\cdot dx_0$ ① ; con $dx_0=2$ ①

Sea $f(x)=\sqrt[3]{x}$; $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ① $\Rightarrow \sqrt[3]{345}\simeq 7+\dfrac{2}{147}\simeq \boxed{7'0136}$ ①

---

10 ⑦



② Func. objetivo: $Coste(x,y)=15x^2+12\cdot 4xy$

② Restricción: Volumen $=8m^3=x^2y$

$C(x)=15x^2+\dfrac{384}{x}$ ②

$C'(x)=30x-\dfrac{384}{x^2}$ ②

$C'(x)=0 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{\dfrac{64}{5}}\simeq 2'34m \ ; \ y\simeq 1'46m}$ ②

Es un mínimo al ser $C''(x)>0$

---

5 ⑧ Func. objetivo: $S(x,y)=x+y$ mínima ①

Restricción: $(x,y)\in$ Parábola $\Rightarrow y=x^2$ ①

$S(x)=x+x^2$ ① ; $S'(x)=1+2x$

$1+2x=0 \Rightarrow \boxed{x=-1/2, \ y=1/4}$ ①

mínimo al ser $S''(-1/2)>0$ ①

B2Fís

RECUP 1ª Eval.

Examen Matemáticas – Recuperación 1ª Evaluación

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	1b	30%	
B3-2.1	Aplicaciones de las derivadas: L'Hôpital, Tangentes, Crecimiento, Curvatura, ...	1a, 2b	40%	
B3-2.2	Plantea problemas de optimización	2a	30%	

(5 ptos.) *EJERCICIO 1*

a) (2 puntos) Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)} \right)$.

b) (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases},$$

donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

(5 ptos.) *EJERCICIO 2*

a) (3 puntos) Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

b) (2 puntos) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

B2Bio

RECUP 1ª Eval.

Examen Matemáticas – Recuperación 1ª Evaluación

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	1.1	20%	
B3-1.2	Derivadas y teoremas asociados	2a	20%	
B3-2.1	Aplicaciones de las derivadas: L'Hôpital, Tangentes, Crecimiento, Curvatura, ...	1.2	30%	
B3-2.2	Plantea problemas de optimización	2b y 2c	30%	

(5 ptos.) *EJERCICIO 1*

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -4x + 4 & si\ x \leq c \\ x^2 - 4x & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (1 punto)

b) Para $c = 2$, representa gráficamente la función f. (1 punto)

2. *Una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto $(1, -9)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.* (3 puntos)

(5 ptos.) *EJERCICIO 2*

Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t$, con $1 \leq t \leq 6$ siendo $t = 1$ la primera hora desde la apertura y $t = 6$ la última hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.

a) ¿En que intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye? (2 puntos)

b) ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima? (2 puntos)

c) ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos? (1 punto)

SOLUCIONES (B2Fis) Máxima puntuación = 20 ptos.

① 4 a) $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{sen }2x}\right) \overset{①}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\text{sen }2x-x}{x\,\text{sen }2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{2\cos 2x-1}{\text{sen }2x+2x\cos 2x} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$ ① ① ①

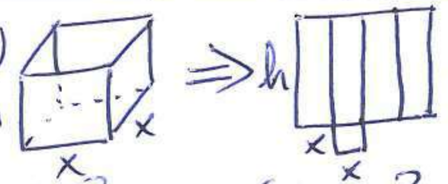
6 b) • En $x=1$: $f(1)=1$; ① $\boxed{1=\lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x)=-1}$ ①

En $x=1$ hay una discontinuidad de $\boxed{\text{salto finito}}$ de valor 2 ①

• En $x=2$: $f(2)=0$; ① $0=\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)$ ① $\Rightarrow \boxed{\text{Cont. en } x=2}$ ①

---

② 6 a)



F.Obj: $S(x,y)=x^2+4xh$ sea mínima ①

Restricc: Volumen $=108\,dm^3=x^2h$ ①

$h=\frac{108}{x^2} \Rightarrow S(x)=x^2+\frac{432}{x}$; $S'(x)=0$ ① $\Rightarrow x=6$; ① $S''(6)>0$ ① $\Rightarrow$ Min

SOL: La caja tiene de dimensiones: $\boxed{x=6\,dm,\ h=3\,dm}$ ①

4 b) $RT\equiv\begin{cases}P=(x=1,\ y=1^2+1-1)=(1,1) & ①\\ m=f'(x=1)=(2x+1)_{x=1}=3 & ①\end{cases} \Rightarrow \boxed{RT\equiv y-1=3(x-1)}$ ① ①

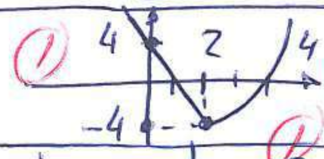
SOLUCIONES (B2Bio) Máxima puntuación = 20 ptos

(1.1) a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, salvo si acaso en $x=c$. Veámoslo:

2 i) $\exists f(c)=-4c+4$; ii) $-4c+4=\lim_{x\to c^-}f(x)=\lim_{x\to c^+}f(x)=c^2-4c$

iii) $f(c)=\lim_{x\to c}f(x) \Rightarrow c^2-4c \overset{①}{=} -4c+4 \Rightarrow c^2=4 \Rightarrow \boxed{c=\pm2}$ ①

2 b) $c=2 \Rightarrow f(x)=\begin{cases}-4x+4 & \text{si } x\le2\\ x^2-4x & \text{si } x>2\end{cases}$ ①



①

(1.2) 6 Máx en $x=-1 \Rightarrow f'(-1)=0 \Rightarrow$ ① $\underline{3-2a+b=0}$ $\boxed{a=-3;\ b=-9;\ c=2}$ ① ① ①

P.I. en $(1,-9) \Rightarrow f''(1)=0 \Rightarrow \underline{6+2a=0}$ ①; $f(1)=-9 \Rightarrow \underline{1+a+b+c=-9}$ ①

---

② $c(t)=2t^3-27t^2+120t$; $t\in[1,6]$; $c'(t)=6t^2-54t+120$

4 a) Aumentan si $c'(t)>0$ ① $\Rightarrow$ ⊕ 4 ⊖ 5 ⊕ ① $\boxed{\begin{array}{l}\text{Crece: }(1,4)\cup(5,6)\\ \text{Decrec: }(4,5)\end{array}}$ ②

4 b) $c''(t)=12t-54$; $c''(4)<0$ ①; $c''(5)>0$ ① $\boxed{\text{Extremos relativos: } \begin{array}{l}t=4 \text{ Máx} \ ①\\ t=5 \text{ mín} \ ①\end{array}}$

2 c) $C(4)=176$ ‖ Por el teorema de Weierstrass hay que calcular
$C(5)=175$ ‖ también $\boxed{C(1)=95 \text{ y } C(6)=180.\ \begin{array}{l}\text{Máximo en } t=6\\ \text{mínimo en } t=1\end{array}}$ ① ①

RECUPERACIÓN

BC2

1ª Evaluación

Examen Matemáticas –Recuperación 1ª Evaluación: Cálculo

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	1	20%	
B3-1.2	Derivadas y teoremas asociados	2	20%	
B3-2.1	Uso de la regla de L'Hôpital	3	20%	
B3-2.2	Aplicaciones de las derivadas	4 y 5	40%	
B3-3.1	Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.	EXTRA	15%	

(2 ptos.) ***EJERCICIO 1***

Determinar el dominio de definición de la función $f(x) = x - ln\left(x^2 - 1\right)$

(2 ptos.) ***EJERCICIO 2***

Representa la gráfica del polinomio

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0'2$$

¿Cuántas raíces reales negativas tiene este polinomio? ¿y cuántas positivas?

(2 ptos.) ***EJERCICIO 3***

Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - cos(2\pi x)}{(x-1)^2}$$

(2 ptos.) ***EJERCICIO 4***

Con un alambre de dos metros se desea formar un cuadrado y un círculo. Determinar el lado del cuadrado y el radio del círculo para que la suma de sus áreas sea mínima.

(2 ptos.) ***EJERCICIO 5***

Para la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$:

a) Comprueba que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $+\infty$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(1'5 ptos.) ***EJERCICIO EXTRA***

Calcular el valor de la siguiente integral:

$$\int x\sqrt[3]{x^2-1}dx$$

(puede hacerse con el cambio de variable $x^2 - 1 = t^3$.

. Calcular el valor de la siguiente integral:

$$\int \frac{lnx}{x^2}dx$$

(puede hacerse por partes).

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 40 ptos (+6 EXTRA)

8 ① $\mathrm{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}/x^2-1>0\} = \boxed{(-\infty,-1)\cup(1,\infty)}$ ④ ① ① ① ①

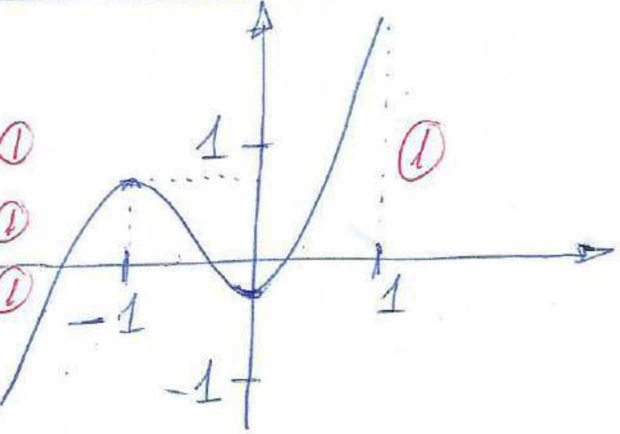
8 ② $f(x)=2x^3+3x^2-0'2$

$f'(x)=6x^2+6x\ (=0\Rightarrow x=0,-1)$ ①

$f''(x)=12x+6 \begin{cases} x=0\Rightarrow \text{mínimo} ① \\ x=-1\Rightarrow \text{máximo} ① \end{cases}$

x	0	−1	1	−2
y	−0'2	0'8	4'8	−4'2

①



Aplicando el teorema de Bolzano ① a la vista de la gráfica, se observa que hay $\boxed{\text{dos raíces negativas}}$ ①: $x_1\in(-2,-1)$, $x_2\in(-1,0)$ y $\boxed{\text{una positiva } x_3\in(0,1)}$ ①

8 ③ a) $\boxed{\text{Ver teoría}}$ ② b) $\lim_{x\to1}\frac{1-\cos(2\pi x)}{(x-1)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'Hôp}{=}\lim_{x\to1}\frac{2\pi\,\mathrm{sen}(2\pi x)}{2(x-1)}$ ① ② $=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'Hôp}{=}\lim_{x\to1}\frac{2\pi^2\cos(2\pi x)}{1}$ ② $=\boxed{2\pi^2}$ ①

8 ④ x R ① F. Objetivo: $A(x,R)=x^2+\pi R^2$; ① Restricción: $4x+2\pi R=2$ $\Rightarrow x=\frac{1-\pi R}{2}$ ① $\to A(R)=\left(\frac{1-\pi R}{2}\right)^2+\pi R^2$ ①

$A'(R)\overset{①}{=}-\pi+R(\pi^2+2\pi)\ (=0\Rightarrow R=\frac{1}{\pi+2})$; $A''(R=\frac{1}{\pi+2})=\pi^2+2\pi>0\Rightarrow$

$\Rightarrow\boxed{R=\frac{1}{\pi+4}}$ ① es un mínimo ① $\Rightarrow\boxed{x=\frac{2}{\pi+4}}$ ① El área es $\boxed{A=\frac{1}{\pi+4}}$

8 ⑤ $y=x^2e^{-x}$; a) $\lim_{x\to\infty}(x^2e^{-x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$ ② $=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{\infty}$ ② $=0$ (Por comparación)

b) $y'=e^{-x}(2x-x^2)$; y crece si $2x-x^2>0$ ② $\Rightarrow\boxed{x\in(0,2)}$ ①, decrece en el resto ①

2 EXTRA 1 $\int x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$ es inmediata, pero se puede hacer el cambio $\begin{Bmatrix} t^3=x^2-1 \\ 3t^2dt=2xdx \end{Bmatrix}$

$\int x\sqrt[3]{t^3}\,\frac{3t^2dt}{2x}=\frac{3}{2}\int t^3dt$ ① $=\frac{3}{2}\frac{t^4}{4}=\boxed{\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2-1)^4}+C}$ ①

4 EXTRA 2 $\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\begin{bmatrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=\frac{dx}{x^2} & v=-\frac{1}{x} \end{bmatrix}$ ① $=$

$=\frac{-\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}$ ① $=\frac{-\ln x}{x}-\frac{1}{x}=$

$=\boxed{-\frac{1+\ln x}{x}+C}$ ① ①

BC2

1ª Evaluación

Examen Matemáticas –TEMAS 7, 8, 9 y 10. Continuidad y Derivabilidad

NOMBRE:

NOTA

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Ejercicios	Peso	Consecución
B3-1.1	Estudio de la continuidad y la derivabilidad de una función.	1	20%	
B3-1.2	Derivadas y teoremas asociados	2	20%	
B3-2.1	Uso de la regla de L'Hôpital	3	20%	
B3-2.2	Aplicaciones de las derivadas	4 y 5	40%	

(2 ptos.) ***EJERCICIO 1***

Diga, razonando la respuesta, qué valor debe tomar c para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

(2 ptos.) ***EJERCICIO 2***

a) **Enuncie el** *teorema de Bolzano*.

b) **Demuestre que alguna de las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ es negativa.**

c) **Demuestre que $P(x)$ tiene también alguna raíz positiva.**

(2 ptos.) ***EJERCICIO 3***

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)^2}{e^{x^2} - 1}$$

(2 ptos.) ***EJERCICIO 4***

Determine el punto (x, y) de la parábola $y = x^2$ en el que la suma $x + y$ alcanza su mínimo valor..

(2 ptos.) ***EJERCICIO 5***

a) **Diga cuando un punto $(x_0, f(x_0))$ es de inflexión para una función $f(x)$.**

b) **Calcule los coeficientes a y b del polinomio $p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1$ para que su gráfica pase por el punto $(1, 1)$, teniendo aquí un punto de inflexión.**

c) **Diga, razonadamente, si en el punto $(1, 1)$ la función $p(x)$ es creciente o decreciente.**

SOLUCIONES Máxima puntuación = 25 ptos.

5 ① Para que $f(x)$ sea continua ha de ser $f(0)=\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x)$

$$c \underset{①}{=} f(0) = \underset{①}{\lim_{x\to 0^{\pm}}} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'Hôp}{=} \underset{①}{\lim_{x\to 0^{\pm}}} \frac{e^x-1}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \underset{①}{\lim_{x\to 0^{\pm}}} \frac{e^x}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}\ ①$$

5 ② a) Ver Teoría ① | b) Sea $f(x)=x^4-8x-1$, continua en $[-1,0]$ ①

con signo $f(-1) \neq$ signo $f(0)$ ① $\Rightarrow$ Por el teorema de Bolzano $\exists\, c \in (-1,0)$ ① tal que $f(c)=0$ y por tanto $P(x)$ tiene raíz negativa

c) Igual que b), tomando $c \in (0,3)$ ① Ya que $\lim_{x\to 0} e^x = 1$ ①

5 ③ $$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) ① \overset{L'Hôp}{=} ① \lim_{x\to 0} \frac{2(e^x-1)e^x}{e^{x^2}\cdot 2x} ① \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^{x^2}\cdot x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^{x^2}\cdot 2x\cdot x + e^{x^2}} ① = \frac{1}{1} = \boxed{1}\ ①$$

5 ④ Minimizar $S(x,y)=x+y$ $\Big\}$ $S(x)=x+x^2$ ①

Restricción: $y=x^2$

$S'(x)=1+2x=0 \Rightarrow x=\frac{-1}{2}$ ① candidato a mínimo

$S''(x=-1/2) \underset{①}{=} 2>0 \Rightarrow$ $x=-1/2$ es mínimo ① $\Rightarrow$ $\boxed{P=\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{4}\right)}$ ①

5 ⑤ a) $x=x_0$ es un P.I. de $f(x)$ si: $\left\langle \begin{array}{l} f''(x_0)=0\ ① \\ f^{impar>2} \neq 0\ ① \end{array} \right.$

b) $p(x)=ax^3-3x^2+bx+1$ $\left\langle \begin{array}{l} P=(1,1) \in \text{Gráfica de } f(x) \\ P=(1,1) \text{ es P.I.} \Rightarrow f''(1)=0 \end{array} \right.$

$p'(x)=3ax^2-6x+b$

$p''(x)=6ax-6 \Rightarrow p''(x=1)=0 \Rightarrow 6a-6=0 \Rightarrow ① \boxed{a=1}$

Por otro lado $p(x=1)=1 \Rightarrow a-3+b+1=1 \Rightarrow ① \boxed{b=2}$

c) $p'(x)=3x^2-6x+2$. Como $p'(x=1)=-1<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{p(x) \text{ es decreciente en } x=1}$ ①

Examen de Matemáticas – RECUPERACION 1ª Evaluación: FUNCIONES

BC2

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Peso	Consecución
B3-1.1	Estudio de continuidad y derivabilidad: **Ejercicios: 1**	25%	
B3-1.2	Derivadas y Teoremas asociados: **Ejercicios: 2**	25%	
B3-2.1	Uso de la Regla de L´Hôpital: **Ejercicios: 3**	25%	
B3-2.2	Problemas de optimización: **Ejercicios: 4**	25%	

NOTA

NOMBRE:

Ejercicio 1

Dada la función $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$, se pide:

a) Estudia su derivabilidad.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Calcula sus asíntotas y esboza su gráfica.

Ejercicio 2

Resuelve las siguientes cuestiones:

a) En el segmento de parábola comprendido entre los puntos A=(1,1) y B=(3,0), ¿existe algún punto cuya tangente sea paralela a la cuerda? ¿Cómo se llama el teorema utilizado?

b) Estudiar si la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [0, 1], en caso afirmativo calcula el valor de c.

c) Demuestra que $2x^3 - 6x + 1 = 0$ tiene solución en el intervalo (0, 1).

Ejercicio 3

Enuncia la regla de L'Hôpital y aplícala para calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)=$

Ejercicio 4

Queremos fabricar una caja con base cuadrada, de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible.

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 32 ptos.

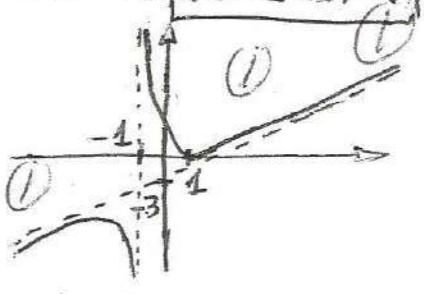
2 ① a) f(x) es derivable donde sea continua, es decir en ① $\boxed{\mathbb{R}-\{-1\}}$

2 b) $RT \equiv \begin{cases} P=(x=1,\ y=0) \Rightarrow P=(1,0) \\ m=f'(1)=\left.\dfrac{2(x-1)(x+1)-(x-1)^2}{(x+1)^2}\right|_{x=1}=0 \end{cases}$ ① $\Rightarrow y-0=0\cdot(x-1)$ $\boxed{y=0}$ ①

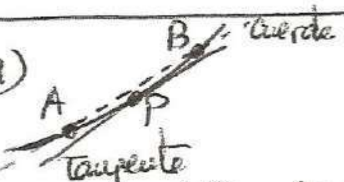
4 c) A.V $(\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}) \Rightarrow \lim_{x\to -1^{\pm}} \dfrac{(x-1)^2}{x+1}=\dfrac{4}{0^{\pm}}=\pm\infty \Rightarrow \boxed{x=-1 \text{ es A.V.}}$ ①

A.H: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Rightarrow \boxed{\text{No hay A.H.}}$ ①

A.O.: $m=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1;$
$n=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x-1)^2}{x+1}-x\right)=-3;$ $\Big\}\ \boxed{y=x-3 \text{ es A.O.}}$ ①



2 ② a)



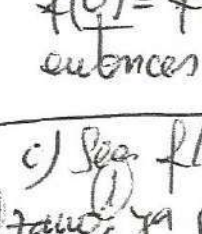
f(x) es una parábola y por tanto una función continua y derivable a la que se puede aplicar el $\boxed{\text{teorema de Lagrange}}$ ①, es decir $\exists c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\boxed{\dfrac{-1}{2}}$ ① con $A=(1,1)=(a,f(a))$; $B=(3,0)=(b,f(b))$

3 b) $f(x)=x-x^3$ es continua en $[0,1]$ ① y derivable en $(0,1)$ y además $f(0)=f(1)=0$ ① por lo que se puede aplicar el teorema de Rolle y ① entonces $\exists c\in(0,1)/f'(c)=0 \Rightarrow f'(c)=\left.1-3x^2\right|_{x=c}=0 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{1/3}}$

3 c) Sea $f(x)=2x^3-6x+1$ que cumple las condiciones del teorema de Bolzano ①, ya que es continua en $[0,1]$ ① y $f(0)=1$ y $f(1)=-3$ tienen distinto signo, por lo que $\exists c\in(0,1)$ ① tal que $f(c)=0 \Rightarrow 2x^3-6x+1=0$

8 ③ $\boxed{\text{a) Ver teoría ④}}$ b) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\dfrac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}$ ① $=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{L'Hop}{=}\lim_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}$ ① $=\left(\dfrac{0}{0}\right)\overset{L'Hop}{=}\lim_{x\to 0}\dfrac{-e^x}{2e^x+xe^x}$ ① $=\boxed{\dfrac{-1}{2}}$ ①

8 ④



Restricción: $y+4x=60\text{ cm}$ ① $\Rightarrow y=60-4x$

Func. a optimizar: $V(x,y)=x^2\cdot y$ ① ; $V(x)=x^2(60-4x)=60x^2-4x^3$ ①

$V'(x)=120x-12x^2=0$ ① $\Rightarrow$ $x=0$ (No hay caja) ① ; $\boxed{x=10\text{ cm};\ y=20\text{ cm}}$ ①

$V''(10)=\left.120-24x\right|_{x=10}=120-240<0$ ① $\Rightarrow x=10$ es máximo. ①

Examen de Matemáticas - TEMA 7, 8, 9 y 10: FUNCIONES

BC2

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Peso	Consecución	NOTA
B3-1.1	Estudio de continuidad y derivabilidad: Ejercicios: 1	20%		
B3-1.2	Derivadas y Teoremas asociados: Ejercicios: 2 y 5b	30%		
B3-2.1	Uso de la Regla de L´Hôpital: Ejercicios: 3	20%		
B3-2.2	Problemas de optimización: Ejercicios: 4 y 5a	30%		

NOMBRE:

Ejercicio 1

Calcula el valor de a ∈ R, a > 0, para que sea continua la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{ax} & si\ x < 0 \\ \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^x & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Ejercicio 2

Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^4 + 1}{x^3}$

a) Determina el valor de a para que la función tenga un mínimo relativo en x = 1

b) ¿Se pude aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [-1, 1]

c) Esboza la gráfica de f(x) para a = 1

Ejercicio 3

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)^2}{1 - \cos(x)}$

Ejercicio 4

Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima.

Ejercicio 5

En un cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido C(t), medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la expresión:

$$C\ (t) = 2 + 10\ t^2 - 2\ t^3 \quad \text{donde } t \in [1, 3]$$

a) ¿Cuál es la cantidad máxima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene?

b) Si el experimento se prolongara en el tiempo, ¿En qué momento habría menos agua? Da la solución con un error menor de 1 hora y explica razonadamente el proceso que has seguido para su cálculo.

= 2 puntos cada ejercicio =

SOLUCIONES

Máxima puntuación = 30 ptos.

---

6 ① $f(x)$ es continua en $x=0$ si:

i) $\exists f(0) = 7^0 = 1$ ①

ii) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x$ ①

iii) $1 = f(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{ax}$ ① $\Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'Hôp}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{a}$ ① $\Rightarrow$ ① $1 = \frac{2}{a} \Rightarrow \boxed{a=2}$ ①

---

6 ② a) $f(x)$ tiene un mínimo en $x=1$ si $\begin{cases} f'(1)=0 \Rightarrow \boxed{a=3} \\ f''(1)>0 \Rightarrow \text{¡Confirmado!} \end{cases}$ ① ①

$f(x) = \frac{ax^4+1}{x^3}$; $f'(x) = \frac{ax^4-3}{x^4}$

b) El teorema de Rolle exige que $f(x)$ sea continua en $[-1,1]$, ① pero $f(x) = \frac{ax^4+1}{x^3}$ no lo es en $x=0$ para ningún valor de a por lo que $\boxed{\text{no}}$ ① se puede aplicar el teorema

c)

x	$0^{\pm}$	$\pm\infty$	$y=x$
$y=\frac{x^4+1}{x^3}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	A.O.

①

A.O.: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+1}{x^4} = 1$ $\rightarrow n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^4+1}{x^3} - x\right) = 0 \Rightarrow$ $y=x$ es A.O.


①

$\left.\begin{array}{l} y=x \\ y=f(x) \end{array}\right\}$ no se cortan

---

6 ③ $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'Hôp}{=}$ ① $\lim_{x\to 0} \frac{2(e^x-1)e^x}{\operatorname{sen} x}$ ① $= \left(\frac{0}{0}\right)$ ① $\overset{L'Hôp.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x}-2e^x}{\cos x}$ ① $= \frac{2}{1} = \boxed{2}$ ②

---

6 ④ La función a minimizar es $m(x) = (x^3+3x^2+1)' = 3x^2+6x$ ① por lo que debe ser:

① $m'(x)=0 \Rightarrow m'(x)=6x+6=0$ ① $\Rightarrow \boxed{x=-1 \text{ es un mínimo}}$ ②

① $m''(x)>0 \Rightarrow m''(x)=6>0 \ \forall x$

---

⑤ El máximo de $C(t)$ será el valor mayor entre $t_1=1$, $t_2=3$, $C'(t_3)=0$ ①

$C'(t) = 20t - 6t^2 = 0 \begin{cases} t=0 \notin [1,3] \\ t=20/6 \notin [1,3] \end{cases}$ ①

$C(t=1) = 10$ litros

$C(t=3) = 38$ litros

3 a) La máxima cantidad se obtiene para $\boxed{t=3 \text{ horas}}$ ① es de 38 litros

3 b) Aplicando el teorema de Bolzano ① podemos asegurar que en el intervalo $[5,6]$ ① $C(t)$ toma el valor 0 ya que es continua ① y el signo en los extremos del intervalo es distinto. La mínima cantidad es 0.

Examen de Matemáticas - TEMA 7 y 8: CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

BC2

Bloque	Estándares de aprendizaje evaluables	Consecución
B3-1.1	Estudio de continuidad y derivabilidad: **Ejercicios: 1 y 2**	
B3-2.1	Uso de la Regla de L´Hôpital: **Ejercicios: 3**	
B3-1.2	Derivadas y Teoremas asociados: **Ejercicios: 4 y 5**	

NOTA

NOMBRE:

Ejercicio 1

Estudiar en $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{2x}{\pi} + 2 & \text{si} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 2 + \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(Junio 1997)

Ejercicio 2

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 + k & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Determina k para que f(x) sea continua en x = 1

b) ¿Es la función f(x) para el valor k calculado derivable en x = 1?

(Junio 2001)

Ejercicio 3

Calcular $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$

(Septiembre 1999)

Ejercicio 4

a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) ¿Podemos asegurar que la gráfica de $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4$ corta al eje X en algún punto del intervalo (1,2)?

Ejercicio 5

Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

a) $y = \frac{\pi - \cos(\pi - x)}{sen^2 x}$; en $x = \frac{\pi}{2}$

b) $y(1 + x) + \cos(yx) = 0$; en $x = 0$

= 2 puntos cada ejercicio=

SOLUCIONES (Máxima puntuación = 40 ptos.)

---

8 ① • En $x=0$: (Continuidad)

i) $\exists f(0)=\cos 0=1$

ii) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2x}{\pi}+2\right)=2\end{array}\right\}$

$\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f(x)$ no ① es continua, presenta una discontinuidad ① de salto $2-1=\boxed{1}$

① (Derivabilidad)

i) $f(x)$ no continua en $x=0$, por tanto no ① es derivable

• En $x=\frac{\pi}{2}$:

i) $\exists f(\pi/2)=2+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=3$

ii) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \pi/2^-}\left(\dfrac{2x}{\pi}+2\right)=3\\ \lim\limits_{x\to \pi/2^+}(2+\operatorname{sen}x)=3\end{array}\right\}$

iii) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to \pi/2} f(x)$ ① ①

$f(x)$ es continua en $x=\pi/2$

i) $f(x)$ es continua ① en $x=\pi/2$

ii) $\left.\begin{array}{l}f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\\ f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{array}\right\}$ $f(x)$ no ① es derivable en $\frac{\pi}{2}$

---

8 ② a) i) $\exists f(1)=7$ ①; ii) $7=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+5)$ ① $=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+k)$ ① $=1+k$; iii) ① $\boxed{k=6}$

b) i) $f(x)$ es continua ① en $x=1$. ii) $2=f'_-(1)$ ① $=f'_+(1)$ ① $=2$ ① ; es Derivable

---

8 ③ $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}x-8}{\sec x+10}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-8}{\frac{1}{\cos x}+10}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{sen}x-8\cos x}{1+10\cos x}=\boxed{1}$

---

8 ④ a) $f(x)$ ① continua ① en $[a,b]$, con $f(a)\cdot f(b)<0$ ① $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c\in(a,b)\,/\,f(c)=0$ ①

b) $f(x)$ es continua en $[1,2]$ al ser un polinomio ①, además $f(1)\cdot f(2)=(-1)\cdot 60<0$ ① $\Rightarrow$ Se puede aplicar el teorema ① de Bolzano en $(1,2)$ por lo que se puede asegurar que $f(x)$ corta al eje X en el intervalo $(1,2)$. ①

---

8 ⑤ a) $y'=\dfrac{[0+\operatorname{sen}(\pi-x)(-1)]\operatorname{sen}^2x-[\pi-\cos(\pi-x)]\,2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}^4x}=\boxed{-1}$ ① ① ① ①

b) $y'(1+x)+y-\operatorname{sen}(xy)(y'x+y)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=-1\end{array}\right\}$ $\boxed{y'=1}$ ① ① ① ①

MATEMATICAS. BC2 1ª Evaluación. E1

Ejercicio 1

Responde a estas cuestiones sobre continuidad y derivabilidad de forma razonada:

a) Si una función es continua en un punto, ¿es derivable en dicho punto? *(Septiembre-96)*

b) Puede ocurrir que exista $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y que la función f(x) no sea continua en x_0? *(Junio-98)*

c) Enuncia el teorema de Weierstrass. Si una función es continua en [a,b] y es estrictamente decreciente en dicho intervalo, ¿dónde alcanza la función el máximo y el mínimo absoluto? *(Junio-08)*

Ejercicio 2

Determina b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 \ si \ x \leq 2 \\ -x^2 + bx + c \ si \ x > 2 \end{cases}$

a) Sea derivable en todos los puntos de

b) Calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1. *(Junio-04)*

Ejercicio 3

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0}(1-x)^{1/x} =$ b) $\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2 - x}) =$ c) $\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - x}) =$

Ejercicio 4

a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Bolzano.

b) ¿Podemos asegurar que la gráfica de $f(x) = x^4 - 3x^2 - \cos(\pi \cdot x)$ corta al eje X en algún punto del intervalo (1,2)?

(Septiembre-07)

Ejercicio 5

Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

a) $y = \dfrac{1 - \pi \cdot x}{sen\left(\dfrac{1}{x}\right)}$; en $x = \dfrac{2}{\pi}$

b) $y(1 + x^2) + \cos[\ln(1 - xy)] = 2$; en x = 0

= 2 puntos cada ejercicio=

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 30 ptos.

6 ① a) No (1) necesariamente, puede ser continua y no coincidir sus derivadas (1) laterales y por tanto no ser derivable.

b) Sí (1), en este caso estamos ante una discontinuidad evitable (1)

c) Ver teoría (1). El máximo lo alcanza en $x=a$ (1) y el mínimo en $x=b$

6 ② a) Para que sea derivable debe ser continua, lo es en $\mathbb{R}$, al tratarse de polinomios, salvo si acaso en $x=2$. Veámoslo:

(1) $8=f(2)=\lim_{x\to 2^-} x^3=\lim_{x\to 2^+}(-x^2+bx+c)=-4+2b+c \Rightarrow \underline{2b+c=12}$

Además sus derivadas (1) laterales deben (1) coincidir $\Rightarrow \underline{12=f'_-(2)=f'_+(2)=-4+b}$ (1)

$2b+c=12$; $b=16 \Rightarrow \boxed{b=16,\ c=-20}$

b) $P\equiv\begin{cases}x=1\Rightarrow y=1\\ m=f'(1)=3\end{cases}$ (1) $\Rightarrow y-1=3(x-1)\Rightarrow \boxed{y=3x-2}$ (1)

6 ③ a) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x}=(1^\infty)=e^{\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(1-x-1)\right]}=e^{\lim_{x\to 0}-x/x}=\boxed{e^{-1}=\frac{1}{e}}$ (1) (1)

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-x}\right)=\left[\begin{matrix}\text{Despreciando términos}\\ \text{de menor grado}\end{matrix}\right]$ (1) $=\lim_{x\to\infty}(-x)=\boxed{-\infty}$ (1)

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-(x^2-x)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+x}{x+x}=\boxed{\frac{1}{2}}$ (1) (1)

6 ④ a) Ver teoría. (2) | b) $f(x)$ es continua en $[1,2]$ al ser composición de funciones continuas (1), además $f(1)=1-3+1=-1$; $f(2)=16-12-1=3$ (1) tienen distinto (1) signo, por lo que se puede aplicar el teorema de Bolzano y por tanto $\exists c\in(1,2)\ /\ f(c)=0$ (1), es decir $f(x)$ corta al eje X.

6 ⑤ a) $y'=\dfrac{-\pi\cdot\operatorname{sen}(1/x)-(1-\pi x)\cos(1/x)(-1/x^2)}{\operatorname{sen}^2(1/x)}$ (1) (1); $\boxed{y'\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\pi}$ (1)

b) Haciendo $x=0$ en la función implícita se obtiene $y=1$;

$y'(1+x^2)+y\cdot 2x-\operatorname{sen}[\ln(1-xy)]\dfrac{-(y+xy')}{1-xy}=0\Rightarrow\boxed{y'(0)=0}$ (1) (1) (1)

MATEMATICAS. BC2 1ª Evaluación. E1

Ejercicio 1

a) **(1,5 puntos)** Encontrar el valor de k para el cual la función $f(x) = \begin{cases} 6 - \dfrac{x}{2} & x < 2 \\ x^2 + kx & x \geq 2 \end{cases}$ es continua. Estudiar si su derivada es una función continua.

b) **(1 punto).** Explica los diferentes tipos de discontinuidades que puede tener una función.

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$

a) (1 punto). Estudiar los valores de a y b para los que la función $f(x)$ es continua para todo valor de x.

b) (0,5 puntos). Determinar la derivada de $f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$.

c) **(1 punto).** ¿Se pude aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [-3,+1]?

Ejercicio 3 (2'5 puntos)

Enuncia el Teorema de Bolzano. Como aplicación de este teorema, demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^{x^2}$ y $g(x) = 2\cos(x^2)$ se cortan en, al menos, un punto.

Ejercicio 4 (2'5 puntos)

Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

a) $y = \dfrac{\pi - sen^2(\pi - x)}{\sqrt{5 - sen(x)}}$; en $x = \dfrac{\pi}{2}$

b) $sen(y) \cdot e^{sen(\pi.x)} - sen(x) \cdot e^{-1+sen(y)} + yx = 1$

SOLUCIONES   Máxima puntuación = 40 ptos

① a) f(x) es continua ① en todo $\mathbb{R}$ por tratarse de funciones

6 polinómicas; estudiemos la unión de las ramas en $x=2$:

① i) $\exists f(2)=4+2K$ // ii) $5=\lim_{x\to 2^-}\left(6-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+kx)=4+2k$

iii) $4+2K=5 \Rightarrow \boxed{K=1/2;\ f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}}$ ① ①

$f'(x)=\begin{cases}-1/2 & \text{si } x<2\\ 2x+1/2 & \text{si } x>2\end{cases}$ ① $\Rightarrow -\frac{1}{2}=f'_-(2)\neq f'_+(2)=\frac{9}{2}$ ① $\Rightarrow \boxed{f'(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}-\{2\}}$

4 b) Definición de continuidad ① // Tipos de discontinuidades según la condición de continuidad que se incumple: Evitable ①, 1ª especie (Salto) ①, 2ª esp. ①

---

② a) f(x) es continua ① en todo su dominio, salvo si acaso en $x=0,\pi$

4 por tratarse sus ramas de polinomios y cos x, que son continuas

• En $x=0$: ① $2a=f(0)=\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x)=2$ // • En $x=\pi$: ① $a\pi^2+b=f(\pi)=\lim_{x\to\pi} f(x)=\pi^2-2a$

$\boxed{f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} \text{ si: } a=1,\ b=-2}$ ①

2 b) $f'(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x<0\\ 2x-2\,\text{sen}\,x & \text{si } 0<x<\pi\\ 2x & \text{si } x\geq\pi\end{cases}$ ① ① • En $x=0$: $3=f'_-(0)\neq f'_+(0)=0$ • En $x=\pi$: $2\pi=f'_-(\pi)=f'_+(\pi)=2\pi$

$\boxed{f(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R}-\{0\}}$

4 c) En $[-3,+1]$ ② <u>no se puede</u> aplicar Rolle, al no ② ser derivable en $0\in(-3,1)$

---

③ a) ③ Ver Teoría. b) Sea $h(x)=e^{x^2}-2\cos x^2$ ①, que es una función

10 continua ① en el intervalo $[-1,0]$ ① y además toma valores de ①

signo distinto en los extremos de dicho intervalo: $f(-1)f(0)<0$,

por lo que se puede asegurar que ① $\exists c\in(-1,0)$, tal que $f(c)=0$ ①

y por tanto $h(c)=0 \Rightarrow e^{x^2}=2\cos x^2$ ① se cortan en $\boxed{x=c\in(-1,0)}$

También vale en $I=[0,1]$

---

④ a) $y'=\dfrac{2\,\text{sen}(\pi-x)\cos(\pi-x)\sqrt{5-\text{sen}(x)}-\left[\pi-\text{sen}^2(\pi-x)\right]\dfrac{-\cos x}{2\sqrt{5-\text{sen}\,x}}}{5-\text{sen}\,x}$ ① ① ① ①

5 $\boxed{y'(\pi/2)=0}$ ①

5 b) $y'\cos y\cdot e^{\text{sen}(\pi x)}$ ① $+\,\text{sen}\,y\,e^{\text{sen}(\pi x)}\cdot\pi\cdot\cos(\pi x)$ ① $-\cos x\,e^{-1+\text{sen}\,y}-\text{sen}\,x\,\cdot$

$\cdot\, e^{-1+\text{sen}\,y}\cdot y'\cdot\cos y$ ① $+\,y'x$ ① $+\,y$ ① $=0$; $y(0)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \nexists\, y'(0)$

MATEMATICAS. BC2 1ª Evaluación. E1

Ejercicio 1

Estudiar en $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2x}{\pi} + 2 & \text{si} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 2 + \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

(Junio 1997)

Ejercicio 2

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

a) Determina k para que f(x) sea continua en $x = 1$

b) ¿Es la función f(x) para el valor k calculado derivable en $x = 1$?

(Junio 2001)

Ejercicio 3

Calcular $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 8}{\sec x + 10}$

(Septiembre 1999)

Ejercicio 4

a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) ¿Podemos asegurar que la gráfica de $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4$ corta al eje X en algún punto del intervalo (1,2)?

Ejercicio 5

Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

a) $y = \dfrac{\pi - \cos(\pi - x)}{sen^2 x}$; en $x = \dfrac{\pi}{2}$

b) $y(1+x) + \cos(yx) = 0$; en $x = 0$

= 2 puntos cada ejercicio=

SOLUCIONES (Máxima puntuación = 40 ptos.)

---

8 ① • En $x=0$: Continuidad

i) $\exists f(0)=\cos 0=1$

ii) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}(\cos x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{\pi}+2\right)=2\end{array}\right\}$

$\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f(x)$ no ① es continua, presenta una discontinuidad ① de salto $2-1=1$ ①

Derivabilidad

i) $f(x)$ ① no continua en $x=0$, por tanto no es derivable ①

• En $x=\frac{\pi}{2}$:

i) $\exists f(\pi/2)=2+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=3$

ii) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \pi/2^-}\left(\frac{2x}{\pi}+2\right)=3\\ \lim\limits_{x\to \pi/2^+}(2+\operatorname{sen}x)=3\end{array}\right\}$

iii) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ① $=\lim\limits_{x\to \pi/2} f(x)$ ①

$f(x)$ es continua en $x=\pi/2$

i) $f(x)$ es continua en $x=\pi/2$ ①

ii) $\left.\begin{array}{l}f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\\ f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\end{array}\right\}$ $f(x)$ no ① es derivable en $\frac{\pi}{2}$

---

8 ② a) i) $\exists f(1)=7$ ①; ii) $7=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+5)$ ① $=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+k)$ ① $=1+K$; iii) ① $\boxed{K=6}$

b) i) $f(x)$ es continua ① en $x=1$. ii) $2=f'_-(1)$ ① $=f'_+(1)=2$ ① ① Sí es Derivable

---

8 ③ $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{\operatorname{tg}x-8}{\sec x+10}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}-8}{\frac{1}{\cos x}+10}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}x-8\cos x}{1+10\cos x}=\boxed{1}$

---

8 ④ a) $f(x)$ continua ① en $[a,b]$, derivable ① en (a,b) con $f(a)\cdot f(b)<0$ ① $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c\in(a,b)\,/\,f(c)=0.$ ①

b) $f(x)$ es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$ al ser un polinomio ①, además $f(1)\cdot f(2)=(-1)\cdot 60<0$ ① $\Rightarrow$ Se puede aplicar el teorema ① de Bolzano en $(1,2)$ por lo que se puede asegurar que $f(x)$ corta al eje X en el intervalo $(1,2)$. ①

---

8 ⑤ a) $y'=\frac{[0+\operatorname{sen}(\pi-x)(-1)]\operatorname{sen}^2x-[\pi-\cos(\pi-x)]\,2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}^4x}$ ① ① ① $=$ ① $\boxed{-1}$

b) $y'(1+x)+y-\operatorname{sen}(xy)(y'x+y)=0$ ① ① $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=0\\ y=-1\end{array}\right\}$ ① $\boxed{y'=1}$ ①

MATEMATICAS. BC2 1ª Evaluación. E2

Ejercicio 1 *(Septiembre-97)*

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & si\ x \leq 0 \\ a + x^3 & si\ 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{2x} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

Responde a estas cuestiones sobre continuidad y derivabilidad de forma razonada:

a) Para a = 1, b = 0, ¿en qué puntos es continua f(x)?
b) Calcula a y b para que f(x) sea derivable en $\mathbb{R}$
c) Si una función no es continua en un punto, ¿puede ser derivable en él?
d) Si una función es derivable en un punto, ¿puede ser discontinua en él?

Ejercicio 2

En la página de un libro la parte escrita ocupa 400 cm^2, los márgenes superiores son de 2 cm y los laterales de 3 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para gastar el menor papel posible?

Ejercicio 3 *(Junio-01)*

Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x - 1)^2}{1 - \cos(x)}$

Ejercicio 4 *(Septiembre-05)*

Halla los valores de los coeficientes *a, b y c* para que la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$$

ELEGIR UNA

a) Tenga un punto de inflexión en (0,1), cuya recta tangente sea paralela a la recta y=2x+1.

b) Halla los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función para los valores de a = b = −1.

Ejercicio 5 *(Junio-11)*

En un cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido C(t), medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la expresión:

$$C(t) = 2 + 10\,t^2 - 2\,t^3 \text{ donde } t \subset [1, 3]$$

ELEGIR UNA

a) ¿Cuál es la cantidad máxima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene?

b) Si el experimento se prolongara en el tiempo, ¿En qué momento habría menos agua? Da la solución con un error menor de 1 hora y explica razonadamente el proceso que has seguido para su cálculo.

= 2 puntos cada ejercicio=

SOLUCIONES Máxima puntuación = 40 ptos.

---

8 ① a) $a=1, b=0 \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x\le 0\\ 1+x^3 & \text{si } 0<x<1\\ 0 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$ 2

$\boxed{f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R}-\{1\}}$ ①, ya que $\lim_{x\to 1^-}(1+x^3) \neq \lim_{x\to 1^+} 0$ ①

---

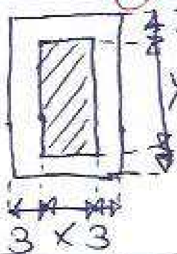
4 b) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ si: $a=1$ ①, $b=4$ ①, pero para estos valores $f'_-(1) \neq f'_+(1)$ ①, por lo que $\boxed{f(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R}-\{1\}}$ ①

---

2 c) No es una condición necesaria ① | d) No puede ser discontinua. ①

---

8 ②



Área $= 400 cm^2$ ① $= x\cdot y$ (Restricción) $\Rightarrow y = \frac{400}{x}$

Optimizar $S(x,y)$ ① $=(x+6)(y+4)$ (Minimizar el papel)

$S(x)$ ① $= 4x + \frac{2400}{x} + 424$; $S'(x)$ ① $=0 \Rightarrow x$ ① $=\sqrt{600}$;

$S''(\sqrt{600})$ ① $> 0 \Rightarrow$ Es mínimo

$\boxed{\text{Sol: Las dimensiones de la página son } \sqrt{600}+6 \text{ ① y } \frac{2\sqrt{600}}{3}+4 \text{ ① } \simeq (30'5, 20'3) \text{ cm}}$

---

8 ③ a) Ver Teoría ④ | b) $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right)$ ① $= \lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1)e^x}{\operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right)$ ① $= \lim_{x\to 0}\frac{2(2e^{2x}-e^x)}{\cos x} = \boxed{2}$ ①

Se puede aplicar L'Hôp. ①

---

④ a) 8

- $(0,1)$ es P.I $\Rightarrow$ ① $y(0)=1 \Rightarrow c=1$ ①
  ① $y''(0)=0 \Rightarrow a=0$ ①
- $m_{\text{Tangente}}(0,1)$ ① $=2 \Rightarrow y'(0)$ ① $=2 \Rightarrow b=2$ ①

$\boxed{f(x)=x^3+2x+1}$ ①

---

8 b) $f(x)=x^3-x^2-x+c \Rightarrow f'(x)=3x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1, -1/3$ ①

$f''(x)=6x-2$ ① $f''(1)=4>0 \Rightarrow \boxed{x=1 \text{ es mínimo}}$ ①
① $f''(-1/3)=-4<0 \Rightarrow \boxed{x=-1/3 \text{ es Máximo}}$ ①

$\boxed{f(x) \text{ crece en } (-\infty,-1/3) \cup (1,\infty)}$ ① ①
$\boxed{f(x) \text{ decrece en } (-1/3, 1)}$ ①

---

⑤ a) 8 $C'(t)=20t-6t^2=0 \Rightarrow t=$ ① $0 \notin [1,3]$ ①; ① $20/6 = 10/3 > 3$ ① $\Rightarrow$ Por lo que de acuerdo con el teorema de Weierstrass ① el máximo se alcanza en el extremo del ① intervalo, es decir $\boxed{t=3}$ ① y no en $t=10/3$ ya que $10/3 \notin [1,3]$ ① $\boxed{C(3)=38\,l}$

---

0 8 b) Veamos si $C(t)=0$, para ello aplicamos el teorema de Bolzano ① en el intervalo $[5,6]$ ①. $C(t)$ cumple las hipótesis ya que es continua ① en $[5,6]$ y derivable ① en $(5,6)$ y $f(5)=2>0$ ①, $f(6)=-70<0$ ①, por lo que $\exists c \in (5,6)$ tal que ① $C(c)=0$, es decir desaparece toda el agua en un momento comprendido entre 5 y 6 horas. ①

MATEMATICAS. BC2 1ª Evaluación. E2

EJERCICIO 1 (2 puntos)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0 \\ k & \text{si } x=0 \\ \dfrac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x} & \text{si } x>0 \end{cases}$,

hallar el valor de k para que f sea continua en $x = 0$. Justificar la respuesta.

EJERCICIO 2 (3 puntos)

(1 punto). Calcular los límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4+e^{-(x+1)}} \quad y \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{4+e^{-(x+1)}}$$

(1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

(1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5+3x+m=0$ sólo tiene una raiz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

EJERCICIO 3 (3 puntos)

Dada la función $f(x)=\dfrac{ax^4+1}{x^3}$

a) (1 punto) Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en x = 1. Para ese valor de a, obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) (1 punto) Obtener las asíntotas de la gráfica de y= f(x) para a = 1

c) (1 punto) Esbozar la gráfica de la función para a = 1

EJERCICIO 4 (2 puntos)

Una hoja de papel debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.

SOLUCIONES Máxima puntuación = 30 ptos.

6 ① i) $\exists f(0)=K$ ① ; ii) $0=\lim\limits_{x\to0^-} e^{1/x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x}=0 \Rightarrow \boxed{K=0}$ ① ① ① ① ①

② 3 a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{4+e^{-(x+1)}}=\frac{2}{4}=\boxed{\frac{1}{2}}$ ① ; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{4+e^{-(x+1)}}=\frac{2}{\infty}=\boxed{0}$ ① ①

3 b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x}}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x}}=\sqrt{1}=\boxed{1}$ ① ① ①

3 c) Sea $f(x)=4x^5+3x+m$, $f(x)$ es siempre creciente ya que $f'(x)=20x^4+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ ①. Como ① $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ y además $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, el teorema de Bolzano ① asegura que $\exists c\in\mathbb{R}/f(c)=0$, y solamente una ya que no existe ningún punto de vuelta para cortar al eje.

③ a) En $x=1$ hay un mínimo $\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4ax^3\cdot x^3-(ax^4+1)\cdot3x^2}{x^6}=0$ ① $\Downarrow$ ①

3 Con $a=3 \Rightarrow f(x)=\frac{3x^4+1}{x^3}$; $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^4=3 \Rightarrow \boxed{x=\pm1}$ ① $\boxed{a=3}$

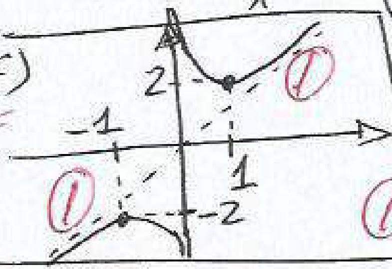
3 b) $f(x)=\frac{x^4+1}{x^3}$

$\rightarrow$ **A.V.**: $\lim\limits_{x\to0^\pm}f(x)=\frac{1}{0^\pm}=\pm\infty \Rightarrow \boxed{x=0 \text{ es A.V.}}$ ①

$\rightarrow$ **A.H.**: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty \Rightarrow \boxed{\text{NO tiene A.H.}}$ ①

$\rightarrow$ **A.O.**: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^4}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^3}-x\right)=0$; $\boxed{y=x \text{ es A.O.}}$ ①

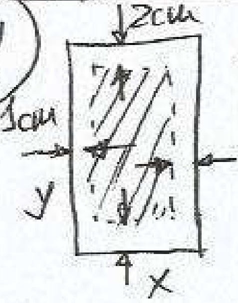
3 c)



① En $x=1$ tiene un mínimo, ya que $f''(1)>0$

En $x=-1$ tiene un máximo, ya que $f''(-1)<0$

6 ④



Función a minimizar: $A(x,y)=x\cdot y$ ① ① ①

Restricción: $\text{Texto}(x,y)=(x-2)(y-4)=18 \Rightarrow y=\frac{10+4x}{x-2}$

$A(x)=\frac{10x+4x^2}{x-2}$; $A'(x)=\frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow x=5\text{cm}$ ①

$A''(x=5)>0 \Rightarrow x=5$ es un mínimo $\Rightarrow y=10 \Rightarrow \text{Área}=50\text{cm}^2$

$\boxed{\text{Sol: Las dimensiones que minimizan el papel son } 5\times10 \text{ cm}}$ ① ①

MATEMATICAS. BC2 1ª Evaluación. E2

(Todos los ejercicios corresponden a la prueba de 2013 en la UCLM)

Ejercicio 1

Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Ejercicio 2

a) Enuncia el Teorema de Rolle.

b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo (1, 2) donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula.

Ejercicio 3

a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

b) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima.

Ejercicio 4 *(Elegir una de las dos opciones)*

OPCION A:

a) Calcula el valor de $a \in R$, $a > 0$, para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{ax} & si\ x < 0 \\ \left(\dfrac{2x+7}{2x+1}\right)^{x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

b) Calcula el límite $\lim_{x \to \infty} f(x)$

OPCION B:

a) Calcula para qué valores de $a \in R$ se verifica $\lim_{x \to 0} [\cos(ax)]^{1/x^2} = e^{-2}$

b) Calcula el límite $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

= 2'5 puntos cada ejercicio=

SOLUCIONES Máxima puntuación = 32 ptos.

---

8 ① $x, y \in \mathbb{R}^+$ tales que: $\frac{x+y}{2} = 24$ ①. Maximizar $P(x,y) = x \cdot y^2$ ①

$x = 48 - y \Rightarrow P(y) = (48-y) \cdot y^2$ ① $<$ $P'(y) = 96y - 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 32$ ①, $\cancel{0}$

$P''(32) < 0$ ① $\Rightarrow \boxed{\text{Sol: } 16 \text{ y } 32}$ ① ①

---

8 ② a) Ver ③ Teoría | b) las rectas tangentes a $f(x)$ tienen la pendiente dada por $m(x) = f'(x)$ ① $= 5x^4 + 12x^3 - 15x^2 - 30x + 4$. Resolver la ecuación $m(x) = 0$ no es fácil, por lo que acudimos al teorema de Bolzano ① para que acote las soluciones: $m(x)$ es continua en $[1,2]$ ① y derivable en $(1,2)$ por ser un polinomio, además toma valores de signo ① distinto en los extremos, $m(1) = -24$, $m(2) = 60$, por ① lo que se puede asegurar que existe un $c \in (1,2)$ tal que $m(c) = 0$.

(2 FORMAS) A: $f(x) =$ ① $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ se le puede aplicar el teorema de Rolle ① al ser continua ① en $[1,2]$ y derivable ① en $(1,2)$ por ser un polinomio, además $f(1)$ ① $= f(2) = 0$, por lo que $\exists c$ ① $\in (1,2)$ tal que $f'(c) = m(c) = 0$

---

8 ③ a) Ver ③ Teoría | b) $m(x) =$ ① $f'(x) = 3x^2 + 6x$ debe ser mínima ①, por lo que $m'(x)$ ① $= 0 = 6x + 6 \Rightarrow x =$ ① -1 y además $m''(-1) = 6 > 0$. El punto pedido es $x = -1$ $y = 3$: $\boxed{P = (-1,3)}$ ①

---

8 ④ OPCIÓN A: a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, salvo si acaso en $x = 0$, para que sea continua debe ser $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{ax}$ ① $= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x \Rightarrow$ ① $\frac{2}{a} = 7^0$ ① $\Rightarrow \boxed{a = 2}$ ①

b) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x = (1^\infty) = e^{\lim_{x \to \infty} \left[x\left(\frac{2x+7}{2x+1} - 1\right)\right]}$ ① $= e^{\lim_{x \to \infty} \frac{6x}{2x+1}}$ ① $= e^{\lim_{x \to \infty} \frac{6x}{2x}}$ ① $= \boxed{e^3}$ ①

OPCIÓN B: a) $\lim_{x \to 0} [\cos(ax)]^{1/x^2} = (1^\infty) =$ ① $e^{\lim_{x \to \infty} \left[\frac{1}{x^2}[\cos(ax) - 1]\right]} = \left\{\begin{array}{c}\text{aplicando} \\ \text{L'Hôpital}\end{array}\right\}$

$= e^{\lim_{x \to \infty} \frac{\cos(ax) - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \to \infty} \frac{-a\,\text{sen}(ax)}{2x}}$ ① $= e^{\lim_{x \to \infty} \frac{-a^2 \cos(ax)}{2}}$ ① $= e^{-\frac{a^2}{2}} = e^{-2} \Rightarrow$ ① $\boxed{a = 2}$

b) $\lim_{x \to \infty} \left[\sqrt{x} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\right]$ ① $= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}[x+1-(x-1)]}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} =$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ ① ① $= \boxed{1}$ ①

MATEMATICAS 2º BACH - CC.NN. 1ª EVALUACION

4PT ① Sea la función $y=(x^2-4)e^x$.

a) ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[-2,2]$?, Calcula c si se puede aplicar este teorema.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c) Determina los extremos relativos

d) Determina los intervalos de crecimiento.

2 ② Realiza un esbozo de la función $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$, calculando previamente sus asíntotas.

1'5 ③ Calcula $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{(Lx)^3+2x}$

2'5 ④ Se desea vallar un terreno rectangular adyacente a un río, de 180.000 m^2 de superficie ¿Qué dimensiones tendrá el terreno para que el coste de la valla sea mínimo?

Dato: Precio de m de valla: 1000 €.

SOLUCIONES

4 ① 1 a) Si, se puede. $2xe^x+(x^2-4)e^x=0 \Rightarrow x=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}$ 0'5 0'5

1 b) $\lim_{x\to-\infty}(x^2-4)e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\dots=\frac{2}{\infty}=0$ 1

1 c) $y'=e^x(x^2+2x-4)=0 \Rightarrow x=\left\langle\begin{matrix}\frac{-2+\sqrt{20}}{2}\\ \frac{-2-\sqrt{20}}{2}\end{matrix}\right.$ 0'5 [redacted]

$$y''=e^x(x^2+2x-4)+e^x(2x+2)\left\langle\begin{matrix}>0\\ <0\end{matrix}\right. \boxed{\begin{matrix}x=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}\ \text{mí}\\ x=\frac{-2-\sqrt{20}}{2}\ \text{Máx}\end{matrix}}$$ 0'5

1 d) CRECE en $\left(-\infty,\frac{-2-\sqrt{20}}{2}\right)\cup\left(\frac{-2+\sqrt{20}}{2},\infty\right)$ 0'5

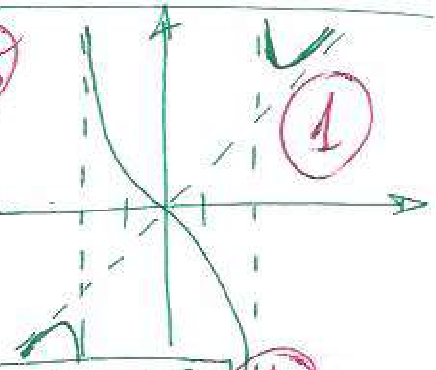
DECRECE en $\left(\frac{-2-\sqrt{20}}{2},\frac{-2+\sqrt{20}}{2}\right)$ 0'5

2 ② A.V $\lim_{x\to2^\pm}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty$ $\boxed{x=2 \text{ es AV}}$ 0'5

$\lim_{x\to-2^\pm}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty$ $\boxed{x=-2 \text{ es AV}}$ [redacted]

A.H $y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty \Rightarrow$ No hay [redacted]

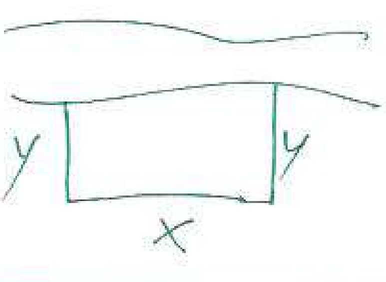
A.O. $m=\lim_{\infty}\frac{x^3}{x^3-4x}=1$ $n=\lim_{\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=0 \Rightarrow \boxed{y=x \text{ es A.O.}}$ 0'5


✓ 1

1'5 ③ $L=\frac{1}{2}$ 1 [redacted] $\Big\| L=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(Lx)^3+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3(Lx)^2\frac{1}{x}+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3(Lx)^2+2x}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{6Lx}{x}+2}=\lim_{\infty}\frac{x}{6Lx+2x}=\lim_{\infty}\frac{1}{\frac{6}{x}+2}=\lim_{\infty}\frac{x}{6+2x}=\frac{1}{2}$ 0'5

2'5 ④



$\left.\begin{matrix}L(x,y)=x+2y\\ xy=180.000\end{matrix}\right\}$ $f(x)=x+\frac{360.000}{x}$ 0'5

1 $\boxed{x=600 \text{ es máximo}} \Rightarrow$ Precio 1200 . 1000 = 1200.000€ 0'5

0'5 $(f''<0)$ $\rightarrow y=300$

MATEMATICAS - 2º BACH - CC.NN. 1ª EVALUACION

---

① Calcula los siguientes limites:

3PT

i) $\lim_{x \to \infty} \left(3x+1-\sqrt{9x^2+2x-1} \right) =$

ii) $\lim_{x \to \infty} \frac{x - \text{sen}\, x}{2x} =$

iii) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+5x}{x^2+a} \right)^{ax} =$ (Según los valores de a)

② Calcula el valor de b para que se cumpla:

2PT

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x+5b^2}{4x+3b^2} \right)^{x} - \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x^2+1}{4x^2-2} \right)^{bx^2} = 0$$

③ Calcula el dominio de:

2PT

i) $y = L\left(\frac{x+2}{x^3} \right)$ ii) $y = \frac{x(Lx)^2}{(x-1)^2}$

1PT ④ Representa la función $y = |2x-2|-2$

⑤ Sean las funciones $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ $g(x) = \sqrt{x-1}$

2PT

Calcula:

i) $f^{-1}(x) =$ ii) $(g \circ f)(x) =$

SOLUCIONES

① 3PT

i) $\lim_{x\to\infty}\left(3x+1-\sqrt{9x^2+2x-1}\right) \overset{0'5}{=} \cdots = \frac{2}{3}$ 1

ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\operatorname{sen}x}{2x}$ 0'5 $= \cdots = \frac{1}{2}$ 0'5

iii) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x}{x^2+a}\right)^{ax} = \cdots = \boxed{e^{+5a}}$ 0'5

$a \in \mathbb{R}^-$ $L = e^{+5a}$

$\forall a \in \mathbb{R}^+$ $a \neq 0$

$a = 0$ $L = 1$

---

② 2PT

$e^{\lim_{\infty} bx^2 \frac{3}{4x^2}} = e^{\frac{3b}{4}}$ 0'5

$e^{\lim_{\infty} x \frac{5b^2-3b^2}{4x+3b^2}} = e^{\frac{b^2}{2}}$ 0'5

$\frac{3b}{4} = \frac{b^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 & 0'5 \\ b = 3/2 & 0'5 \end{cases}$

---

③ 2PT

i) $\operatorname{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{x+2}{x^3} > 0\right\} = (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ 0'5 0'5

ii) $\operatorname{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \wedge x \neq 1\} = (0, \infty) - \{1\}$ 0'5 0'5

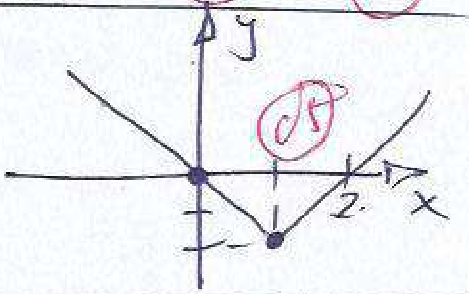
---

④ 1PT

$y = -(2x-2)-2$ 0'5 $y = 2x-2-2$

$y = -2x$ $y = 2x-4$

1



---

⑤ 2PT

i) $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-3}$ 1

ii) $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{x-2}}$ 1

EXAMEN MATEMATICAS. BC2 RECUPERACION 1ª Evaluación

1 La velocidad de una partícula, medida en m/sg, está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$. Se pide:

a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0, 3]$ se alcanza la velocidad máxima?

b) Calcula $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido.

2 a) Definición de derivada de una función en un punto. (0,5 puntos)

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + sen\,x}{2x - x^2} & \text{si } x < 0 \\ bx + c & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, determina los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$

para que sea continua en x = 0 y derivable en x = 1.

3 Calcula los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{2x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x-1}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\,x - x\cos x}{2x^3}$

4 Representa la función $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

5 Se tiene una cuerda de 2 metros de longitud y se quiere dividir en dos trozos para formar con uno de ellos un circulo y con el otro un cuadrado, ¿cuánto debe medir cada trozo para que la suma de las áreas de las dos figuras sea mínima?

Soluciones

---

① $v(t)=(t^2+2t)e^{-t}$; $v'(t)=(-t^2+2)e^{-t}$; $v''(t)=(t^2-2t-2)e^{-t}$

a) $v'(t)=0 \Rightarrow t=+\sqrt{2}\in[0,3]$; $v''(\sqrt{2})<0 \Rightarrow$ Máximo

El teorema de Weierstrass nos asegura que $f(x)$ alcanza un máximo en $[0,3]$ al ser continua, y éste puede ser en los extremos: $v(0)=0$, $v(3)=15e^{-3}\approx 0'75$, $v(\sqrt{2})\simeq 1'17$

Por tanto el máximo se alcanza en $\boxed{t=\sqrt{2}\text{ seg}}$

b) $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^2+2t}{e^t}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t+2}{e^t}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2}{e^t}=\frac{2}{\infty}=\boxed{0}$

---

② $\boxed{\text{a) Ver Teoría}}$ b) $f(x)$ continua en $x=0 \Rightarrow c=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax+\text{sen}\,x}{2x-x^2}=\frac{a+1}{2}$

$f(x)$ derivable en $x=1$ $\nearrow$ $f(x)$ continua $\Rightarrow b+c=\frac{1}{2}$ $\boxed{c=3/4}$

$\searrow$ $f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow\boxed{b=-1/4}$ $\boxed{a=1/2}$

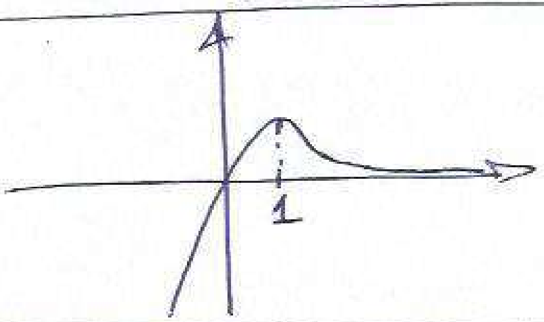
---

③ a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(1^{0^+}=\infty\right)=e^{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}\left(\frac{2x+1}{x+2}-1\right)}=\boxed{e^{1/3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x-x\cos x}{2x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\boxed{\frac{1}{6}}$

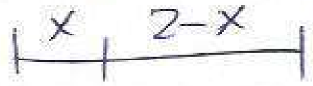
---

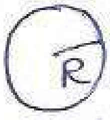
④
- Cortes con los ejes: $P=(0,0)$
- Asíntotas
  - A.V.: No hay
  - A.H.: $y=0$
  - A.O.: No hay
- Máximo en $x=1$



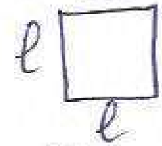
---

⑤





$l=2\pi R\Rightarrow \text{Área}=\pi R^2=\frac{x^2}{4\pi}$



$\text{Perím}=4l=2-x\Rightarrow\text{Área}=\frac{(2-x)^2}{16}$

$\Big\}\ A(x)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(2-x)^2}{16}$

$A'(x)=0\Rightarrow x=\frac{8\pi}{16+4\pi}$; $A''(x)>0\Rightarrow$ mínimo: $\boxed{x=\frac{8\pi}{16+4\pi}}$ $\boxed{2-x=\frac{32}{16+4\pi}}$

MATEMATICAS. BC2 Recuperación 1ª Eval. R1

(Todos los ejercicios corresponden a la prueba de 2007 en la UCLM)

Ejercicio 1

a) Define el concepto de función continua en un punto. Tipos de discontinuidades.

b) Si $f(x)=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$, indica de forma razonada en qué valor x=a no está definida f(x)

c) Calcula el valor de b∈ R para que la función $g(x)=\begin{cases} f(x) \text{ si } x\neq a \\ b \text{ si } x=a \end{cases}$ sea continua.

Ejercicio 2

Dada la función $f(x)=9x+6x^2-x^4$, se pide:

a) Halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de f(x) tiene pendiente 1.

b) Calcula los puntos de inflexión de f (x) .

Ejercicio 3

Dada la función $f(x)=2-x^2\cdot e^{-x}$, se pide:

a) Halla las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcula, si existen, la ecuación de sus asíntotas.

c) Con la información anterior realiza un esbozo de la gráfica de f(x).

Ejercicio 4

De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 3 metros, determina la medida de los catetos de aquél que tenga área máxima.

Ejercicio 5 *(Elegir una de las dos opciones)*

OPCION A:

a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. Dada $f(x)=\dfrac{1+x}{2-x}$, se pide:

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo [1,6]?

c) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función dada en el intervalo [3,11]?

d) Si en algún caso se cumplen las hipótesis del teorema, calcula el valor para el cual se verifica la tesis del mismo.

OPCION B:

Enuncia el Teorema de Bolzano. Aplícalo para probar que la ecuación $sen(x)=x^2-1$ tiene al menos una solución real. (Indicación: El ángulo x viene en radianes.)

= 2 puntos cada ejercicio=

SOLUCIONES

Máxima puntuación = 40 ptos.

---

8 ① a) Resumido: $\exists f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ ①. Discont.: Evitable ①, 1ª especie, 2ª esp. ②

Salto finito Salto infinito

3

b) $f(x)$ no está definida en $x=0$ ① ya que $\nexists f(0)$ ① por ser $0 \notin Dom(f)$

2

c) $b = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'Hop}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3e^{3x} + 3e^{-3x}}{4} = \frac{6}{4} = \boxed{\frac{3}{2} = b}$ ① ① ①

3

---

8 ② $f'(x) = 9 + 12x - 4x^3 = 1 \Rightarrow -4x^3 + 12x + 8 = 0 \Rightarrow x = -1$ doble, 2 ① ①

a) Los puntos son $\boxed{P = (-1, -4)}$ ① y $\boxed{Q = (2, 26)}$ ①

4

b) $f''(x) = 12 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (candidatos a P.I.) ① $\boxed{R = (1, 14), S = (-1, -4)}$ ① ①

4 $f'''(x) = -24x$; $f'''(\pm 1) \neq 0$ ① $\Rightarrow$ $\boxed{\text{En } x=1, x=-1 \text{ hay ptos inflexión}}$

---

8 ③ $f(x) = 2 - x^2 \cdot e^{-x}$. $f'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x)$; $f''(x) = e^{-x}(-x^2 + 4x - 2)$

a) $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$ ① $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow f''(0) < 0 \Rightarrow \\ x = 2 \Rightarrow f''(2) > 0 \Rightarrow \end{cases}$ ① $\boxed{\begin{array}{l} x=0 \text{ es un Máximo} \\ x=2 \text{ es un mínimo} \end{array}}$ ①

3 $\boxed{Max = (0, 2), Min = (2, 2 - 4e^{-2})}$

b) A.V. No tiene ya que $Dom(f) = \mathbb{R}$ ①

3

A.O. $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \dots = 0$.

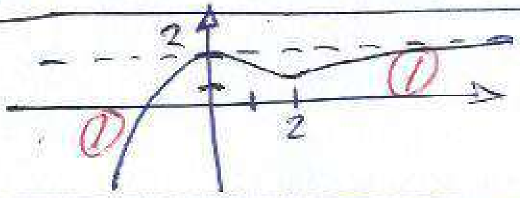
No hay A.O. ①

A.H. $y = \lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{x^2}{e^x}\right) = 2 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} y = 2 \text{ es A.H} \\ \text{cuando } x \to \infty \end{array}}$ ①

$y = \lim_{x \to -\infty} \left(2 - \frac{x^2}{e^x}\right) = -\infty$.

2 c)

X	0	2	+∞	−∞
Y	2	1'5	2	−∞
	(M)	(m)		



---

8 ④

① ① ①

Maximizar: $A(x, y) = \frac{xy}{2}$ ①
Restricción: $x^2 + y^2 = 9$

$A(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{9 - x^2}$. $A'(x) = \frac{9 - 2x^2}{2\sqrt{9 - x^2}}$ ①

$A'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{9}{2}} = y}$ ① ① Máximo ya que $A'' < 0$ ①

---

8 ⑤ a) Ver Teoría ①

Ⓐ b) No ①, ya que no es continua en $2 \in [1, 6]$ ①

c) Sí ①, al ser cont. y derivable ①

d) $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-12/9 - (-4)}{11 - 3}$ ①

$\rightarrow f'(c) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$

$f'(x) = \frac{3}{(2-x)^2}$

$\frac{3}{(2-x)^2} = \frac{1}{3}$

$\Downarrow$

$\boxed{x = 5}$ ①

$x = -1 \notin [3, 11]$ ①

Ⓑ a) Ver teoría ②

b) Sea $f(x) = x^2 - 1 - \text{sen}\, x$ ① que cumple el teorema de Bolzano en $[0, 2]$ ① ①, ya que $f(0)$ y $f(2)$ tienen distinto signo ①, por lo que se puede asegurar ① que $\exists c \in (0, 2) / f(c) = 0$ ①

MATEMATICAS. BC2 1ª EVALUACION - E2

2PT ① Sea $f(x)=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$, se pide:

a) Estudia la continuidad de $f(x)$

b) Razona la posible existencia de asíntotas de $f(x)$

2PT ② Sea $f(x)=9x+6x^2-x^4$, se pide:

a) Curvatura de $f(x)$ y puntos de inflexión

b) Encuentra de forma razonada la posición aproximada de un extremo relativo.

PT ③ Si $f'(a)=0$, ¿cuál de estas afirmaciones es cierta?

a) f tiene un máximo o mínimo en $x=a$

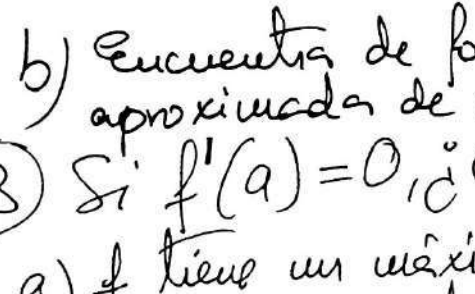
b) f tiene un punto de inflexión en $x=a$

c) f tiene tangente paralela al eje OX en $x=a$

|| Razona tu respuesta

PT ④ Calcula b para que $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq a \\ b & \text{si } x=a \end{cases}$ sea continua

PT ⑤ Calcula la longitud de la cuerda $\overline{CD}$ para que el área del polígono $\overline{ACEDB}$ de la figura adjunta sea máxima.



PT ⑥ Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{x^2-\text{sen}(Lx)}$

b) $y=\dfrac{3Lx-x}{x\,\text{tg}\,x}$

SOLUCIONES

① a) $Dom(f)=\{x\in\mathbb{R}/4x\neq 0\}$; $x=0$ presenta una discont. del tipo...

- $\nexists f(0)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}\overset{L'Hôp.}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}+3e^{-3x}}{4}=\dfrac{3+3}{4}=\dfrac{6}{4}$

} ...EVITABLE

b) A.V: $\boxed{\text{No hay}}$ ($x=0$ no es)

A.H.: $y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3e^{3x}+3e^{-3x}}{4}=\infty$: $\boxed{\text{No hay}}$

A.O.: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{L'Hôp.}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x^2}\underset{L'Hôp.}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3e^{3x}+3e^{-3x}}{8x}\underset{L'Hôp.}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9e^{3x}-9e^{-3x}}{8}=\infty$: $\boxed{\text{No h}}$

② $y=9x+6x^2-x^4$; $y'=9+12x-4x^3$; $y''=12-12x^2$; $y'''=-24x$

a) $y''\gtrless 0$ $x=\pm 1$

-1 1

$\hookrightarrow x=-2$, $y''<0$; $\hookrightarrow x=0$, $y''>0$; $\hookrightarrow x=2$, $y''<0$

$\boxed{\begin{array}{l}f(x) \text{ es cóncava hacia abajo ó convexa en } (-\infty,-1)\cup(1,\infty)\\ f(x) \text{ es cóncava hacia arriba o cóncava en } (-1,1)\end{array}}$

Candidatos a Ptos. de inflexión $<\begin{array}{l}x=-1,\ y'''(-1)\neq 0\\ x=1,\ y'''(1)\neq 0\end{array}$ } | $x=-1$; $x=1$ son ptos. inflex.

b) $f(x)=9x+6x^2-x^4$. $f(x)=0\Rightarrow x=0, x=3$.

Teorema de Rolle: $f(x)$ continua en $[0,3]$, derivable en $(0,3)$

$f(0)=f(3)\Rightarrow \boxed{\exists c\in(0,3)}/f'(c)=0$

③ Correcta la c)

④ $\boxed{b=\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

⑤ $A=\dfrac{2R+2x}{2}h+\dfrac{2R\cdot(R-h)}{2}=(R+x)h+R(R-h)=h(R+\sqrt{R^2-h^2})+R($

$R^2=x^2+h^2$

$A=h\sqrt{R^2-h^2}+R^2$; $A'=\dfrac{h\cdot(-2h)}{2\sqrt{R^2-h^2}}+\sqrt{R^2-h^2}=\dfrac{-h^2}{\sqrt{R^2-h^2}}+\sqrt{R}$

$A'(h)=0\Rightarrow +h^2=R^2-h^2$; $h=R/2\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\Rightarrow\boxed{\overline{CD}=\sqrt{3}R}$

(No puede ser mínimo)

⑥ a) $y'=\dfrac{2x-\cos(Lx)\cdot 1/x}{2\sqrt{x^2-\operatorname{sen}(Lx)}}$

b) $y'=\dfrac{(3\cdot 1/x-1)\,x\,tg\,x-(3Lx-x)\left[tg\,x+x(1+tg^2x)\right]}{x^2\,tg^2x}$

MATEMÁTICAS. BC2 1ª EVALUACIÓN. E1

2PT ① Define el concepto de:

a) Función continua en un punto.
b) Función derivable en un punto.

2PT ② Calcula la función derivada de:

a) $y = \frac{1+e^{tg x}}{\sqrt{L(sen x)}}$ b) $y = x \cdot arcsen\left(\frac{-1}{x}\right)$

2PT ③ Dada la función $f(x) = -x^4+6x^2+9x-1$, se pide:

a) Halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente 1.

b) Encuentra un intervalo de anchura menor que 1 en el que la función corta al eje X. Justifica el procedimiento utilizado.

2PT ④ En Agosto de 1548, el matemático Ludovico Ferrari le propuso a su colega Niccolo Fontana, apodado Tartaglia, el siguiente problema: "Halla dos números reales no negativos cuya suma sea 8, de manera que su producto multiplicado por su diferencia sea máximo". Encuentra la solución del problema con 2 decimales.

2PT ⑤ Sea la función $y = \frac{8x^2-4}{4x-3}$. Calcula:

a) Extremos relativos
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

SOLUCIONES

2 ① a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en $x=x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} i)\ \exists f(x_0) & (0'5) \\ ii)\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \\ iii)\ f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x) & (0'5)\end{cases}$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable en $x=x_0$ si $\exists \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (0'5) y es finito (0'5)

2 ② a) $y' = \dfrac{e^{tg x}(1+tg^2x)\sqrt{L(sen x)} - (1+e^{tg x})\frac{1}{2\sqrt{L(sen x)}}\cdot\frac{1}{sen x}\cdot\cos x}{\left[\sqrt{L(sen x)}\right]^2}$ (0'5) (0'5)

b) $y' = 1\cdot arcsen\left(\frac{-1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(-1/x)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (0'5) (0'5)

2 ③ $f(x)=-x^4+6x^2+9x-1$; a) $m=f'(x_0)=1=-4x^3+12x+9$

$x_0=-1$ doble $\Rightarrow \boxed{P=(-1,-5)}$ (0'5) ; $x_0=2 \Rightarrow \boxed{Q=(2,25)}$ (0'5)

~~[illegible]~~ b) Utilizando el teorema de Bolzano, al ser $f(x)$ continua, se necesita encontrar un intervalo donde la función tome signos distintos. Se trata de resolver la ecuación $f(x)=0$, para ello acotamos la solución: $f(0)=-1$; $f(1)=+13$. $f(0'5)=+4'94 \Rightarrow$ En el intervalo $(0,0'5)$, $f(x)$ es continua y $f(0)\cdot f(0'5)<0 \Rightarrow$ se puede aplicar el teorema de Bolzano, y por tanto $\boxed{\exists c\in(0,0'5)} / f(c)=0 \Rightarrow -c^4+6c^2+9c-1=0 \Rightarrow$ Corte con (0'5) (0'5)

2 ④ $x,y>0$ $\begin{cases}\text{Restricción: } x+y=8 & (0'5)\\ \text{Maximizar: } F(x,y)=x\cdot y\cdot(x-y)\end{cases}$ ~~[illegible]~~

$\underline{F'(x)=-6x^2+48x-64} \Leftarrow \underline{F(x)=-2x^3+24x^2-64x} \Rightarrow \underline{F''(x)=-12x+48}$ (0'5)

$F'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1'69 \Rightarrow F''(x_1)=27'72>0 \Rightarrow x_1=1'69 \text{ es mínimo}\\ x_2=6'31 \Rightarrow F''(x_2)=-27'72<0 \Rightarrow x_2=6'31 \text{ es máximo}\end{cases}$ (0'5)

Solución: $x=6'31$ $y=8-6'31=1'69$: $\boxed{\text{El } 6'31 \text{ y el } 1'69}$ (0'5)

⑤ 2 $y=\dfrac{8x^2-4}{4x-3}$; $y'=\dfrac{16x(4x-3)-(8x^2-4)\cdot 4}{(4x-3)^2}=\dfrac{32x^2-48x+16}{(4x-3)^2}=0 \Rightarrow$ (0'5)

a) $y' \gtrless 0 \Rightarrow 32x^2-48x+16 \gtrless 0 \Rightarrow 32x^2-48x+16=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1/2 \\ x_2=1\end{cases}$ (0'5)

x=0 x=0'6 x=0'9 x=2

⊕ 1/2 ⊖ 3/4 ⊖ 1 ⊕

(0'5) $\boxed{\begin{matrix}\text{En } x=1/2 \text{ hay máximo}\\ \text{En } x=1 \text{ hay mínimo}\end{matrix}}$ al ser función continua en [illegible] cambio en crecimiento

(0'5) b) $\boxed{\text{Crece en } (-\infty,1/2)\cup(1,\infty)}$; Decrece en $\boxed{(1/2,1)}$