13 Funciones: límites y continuidad

1. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 2x + 1)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} (x^4 + x - 3)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 2)$

2. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - x^2)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 3)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 5)$

3. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x}$

4. Calcula los límites laterales de las siguientes funciones racionales en los puntos en los que no están definidas. ¿Existe el límite de la función en esos puntos?

a) $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - x}$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 4}{x + 1}$

6. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$

7. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

8. Calcula los siguientes límites utilizando funciones equivalentes en $x = 0$:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 5x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\text{tg } 2x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot (1 - \cos x)}{\text{sen}^2 x}$

9. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x + 2} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

10. Una función $f(x)$ está dada por la expresión $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ si $x \neq 1$. ¿Cómo elegirías el valor de $f(1)$ para que la función fuera continua en ese punto?

11. Calcula el valor de a para el que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x < 3 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$.

SOLUCIONES

1. a) 4 b) -3 c) $+\infty$

2. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$

3. a) -1

b) Tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 - x^3 + 3x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^3 - x^2 + 3) \cdot x}{(x - 1) \cdot x} = -3$$

4. a) $f(x) = \frac{3}{x - 2}$ no está definida en $x = 2$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

No existe el límite ya que los límites laterales son distintos.

b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x}$ no está definida en $x = 0$ y $x = 1$.

En $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x \cdot (x - 3)}{x \cdot (x - 1)} = 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \cdot (x - 3)}{x \cdot (x - 1)} = 3$$

Como los límites laterales son iguales $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$.

En $x = 1$: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

No existe el límite ya que los límites laterales son distintos.

5. Todos estos límites tienen indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

a) Dividiendo por x^2, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3} = 1$

b) Dividiendo por x, $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 4}{x + 1} = -\infty$

6. Todos estos límites tienen indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

a) $$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = 2$$

b) $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x + 2} - 2)(\sqrt{x + 2} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x + 2} + 2)} = \frac{1}{4}$$

7. Los límites de este ejercicio presentan indeterminación del tipo $\infty - \infty$.

a) $$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x) \cdot (\sqrt{x^2 - 4} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4} + x)} = 0$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \frac{1}{2}$$

8. Estos límites tienen indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{x} = 3$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{10x}{5x} = 2$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{5x}{\text{tg } 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

d) $$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (1 - \cos x)}{\text{sen}^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (1 - \cos x)}{x^2} = 0$$

9. a) $f(0) = -1$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$

No es continua en $x = 0$.

b) $f(1) = 1$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

Es continua en $x = 1$ ya que $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

$f(3) = 5$; $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 7$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$

No es continua en $x = 3$.

c) $f(2) = 2$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

Es continua en $x = 2$ ya que $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 2$.

10. Debe ser $f(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x = 1$

11. Para que sea continua en $x = 3$ debe ser:

$f(3) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$

$f(3) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 13$; $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 9 - a \Rightarrow$

$\Rightarrow 13 = 9 - a$

Por tanto, $a = -4$.

13 Funciones: límites y continuidad

1. Calcula el valor de estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - \text{sen}^2\, x}{\text{sen}\, x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, 5x - \text{sen}\, 3x}{\text{sen}\, x}$

2. Calcula el valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{3x}$

3. La función g(x) toma los valores $\dfrac{|x^3 - x|}{x}$ para $0 < x \leqslant 1$ y es continua en el intervalo $[0, 1]$.

a) ¿Cuánto vale g(0)?
b) ¿Puede ser continua la función g(x) en el intervalo $[-1, 1]$ para algún valor de g(0)?

4. Obtén de manera razonada dos funciones que no sean continuas en un cierto punto $x = a$ de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho punto.

5. Determina cuál debe ser el valor del parámetro k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1 - \cos x) \cdot \text{sen}\, x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$.

6. Esboza la gráfica de una función f(x) que cumpla los siguientes requisitos:

- Dominio $\mathbb{R} - \{-3,1\}$
- $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 5$
- Los límites laterales en $x = -1$ son finitos pero distintos.
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

7. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x \cdot |x| & \text{si } x \leqslant 1 \\ x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

8. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx + k - 1 & \text{si } x < 2 \\ \text{sen}\, \pi x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$ según los valores del parámetro k.

9. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

10. Halla el dominio de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - k}$, sabiendo que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = 6$.

11. ¿Qué relación debe existir entre los parámetros a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2bx - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en todos los números reales?

SOLUCIONES

1. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\operatorname{sen} x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2} =$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 0$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} - \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} =$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x} = 5 - 3 = 2$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} =$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{3x\cdot(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} =$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x\cdot(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{3}$

3. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{|x^3 - x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-(x^3 - x)}{x} =$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0^+}\frac{x - x^3}{x} = \lim_{x\to 0^+}(1 - x^2) = 1$

Como g es continua en $[0, 1]$, $g(0) = 1$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{|x^3 - x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3 - x}{x} = \lim_{x\to 0^-}(x^2 - 1) = -1$

No puede ser continua en $[-1, 1]$, ya que los límites laterales en $x = 0$ son distintos; la función $g(x)$ no tiene límite en $x = 0$.

4. Por ejemplo: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y

$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ no son continuas en $x = 0$; sin embargo, la función suma sí lo es:

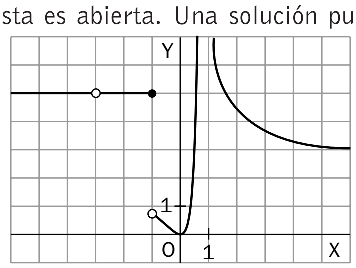
$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

5. $k = f(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$;

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cdot\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} =$

$= 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow k = 0$

6. La respuesta es abierta. Una solución puede ser:



7. Posibles puntos de discontinuidad $x = 1$ y $x = 2$.

$\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1;\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1;$

$f(1) = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2;\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(4 - x) = 2;$

$f(2) = 2$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

8. Los dos trozos de la función son continuos en sus intervalos. Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$.

$f(2) = \operatorname{sen} 2\pi = 0;\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\operatorname{sen}\pi x = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2 + kx + k - 1) = 3 + 3k$

Para que sea continua debe ser:

$3 + 3k = 0 \Rightarrow k = -1$

Si $k = -1$, la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Si $k \neq -1$, la función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

9. Posibles puntos de discontinuidad $x = -1$ y $x = 1$.

$\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}|x + 2| = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2 = 1$

$f(-1) = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1;$

$\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x + 1) = 3;$

$f(1) = 1$

La función es discontinua en $x = 1$.

10. $\displaystyle 6 = \lim_{x\to +\infty}(f(x) - 2x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x\right) =$

$\displaystyle = \lim_{x\to +\infty}\frac{2kx + 1}{x - k} = 2k \Rightarrow k = 3$

El dominio de $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{3\}$.

11. En $x = 1$: $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax^2 + bx - 1) =$

$= a + b - 1 = f(1)$

$\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2bx - 2) = 2b - 2$

Para que sea continua en $x = 1$:

$a + b - 1 = 2b - 2 \Rightarrow a = b - 1$