MATEMATICAS. 4ºESO-B. TEMA 8: Vectores

1.- Calcula el valor de k sabiendo que el módulo del vector $\vec{v}$ = (k, 3) es 5.

2.- Si $\vec{v}$ = (3, 4), hallar un vector unitario de su misma dirección y sentido.

3.- Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices A(1, 2), B(−3, 4) y C(−1, 3).

4.- Hallar las coordenadas de C, sabiendo que B(2, −2) es el punto medio de AC, A(−3, 1).

5.- Averiguar si están alineados los puntos: A(−2, −3), B(1, 0) y C(6, 5).

6.- Calcula D para que el cuadrilátero A(−1, −2), B(4, −1), C(5, 2) y D sea un paralelogramo.

7.- Las coordenadas de los extremos del segmento AB son A(2, −1) y B(8, −4). Hallar las coordenadas del punto C que divide a AB en dos partes tales que AC es la mitad de CB.

8.- Si el segmento AB de extremos A(1, 3), B(7, 5), se divide en cuatro partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos de división?

9.- Hallar el simétrico del punto A(4, −2) respecto de M(2, 6).

10.- Hallar el simétrico del punto A(3, −2) respecto de M(−2, 5).

11.- Del triángulo ABC se sabe A(2, 1), B(1, 0) y el baricentro G(2/3, 0), calcula C.

12.- Dados A(3, 2) y B(5, 4) halla un punto C, alineado con A y B, tal que CA/CB = 3/2

13.- Hallar un vector unitario de la misma dirección que el vector $\vec{v}$ = (8, −6).

14.- Una recta pasa por el punto A(−1, 3) y tiene como vector director $\vec{v}$ = (2, 5). Da su ecuación vectorial, paramétricas y continua.

15.- Escribir la ecuación punto pendiente de:
- a) Una recta que pasa por el punto A(−1, 3) y tiene un vector director $\vec{v}$ = (2, 5).
- b) Una recta que pasa por los puntos A(−2, −3) y B(4, 2).
- c) Una recta que pasa por A(−2, −3) y tiene una inclinación de 45°.

16.- Escribir la ecuación general de la recta que:
- a) Pasa por A (1, 5) y tiene como vector director $\vec{v}$ = (−2, 1).
- b) Pasa por A (1, 5) y tiene como pendiente m = −2.

17.- Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por A (1, 5) y tiene como pendiente m = −2.

18.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(1, 3) y B(2, −5).

19.- Escribe de todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por A(1, 2) y B(−2, 5).

20.- Hallar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta 3x + 2y − 7 = 0.

21.- Estudiar la posición relativa de las rectas de ecuaciones:

1) 2x + 3y − 4 = 0	2) x − 2y + 1 = 0	3) 3x − 2y − 9 = 0
4) x + 6y − 8 = 0	5) 2x − 4y − 6 = 0	6) 2x + 3y + 9 = 0

22.- ¿Son secantes las rectas r ≡ x + y − 2 = 0 y s ≡ x − 2y + 4 = 0? En caso afirmativo calcular el punto de corte.

23.- Clasificar el triángulo determinado por los puntos:
a) A(6, 0), B(3, 0) y C(6, 3) b) A(4, −3), B(3, 0) y C(0, 1)

24.- De un paralelogramo ABCD conocemos A(1, 3), B(5, 1), C(−2, 0). Halla las coordenadas de D.

25.- Se tiene el cuadrilátero ABCD cuyos vértices son A(3, 0), B(1, 4), C(−3, 2) y D(−1, −2). Comprueba que es un paralelogramo y determina su centro.

26.- De un paralelogramo se conoce un vértice, A(8, 0), y el punto de corte de las dos diagonales, Q(6, 2). También sabemos que otro vértice se encuentra en el origen de coordenadas. Calcular:
a) Los otros vértices b) Las ecuaciones y longitud de las diagonales.

27.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(1, 5), y es paralela a la recta 2x + y + 2 = 0

28.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, −3) y es paralela a la recta que une los puntos (4, 1) y (−2, 2).

29.- La recta 3x + ny − 7 = 0 pasa por el punto A(3, 2) y es paralela a la recta mx + 2y − 13 = 0. Calcula m y n.

30.- Dado el triángulo ABC, de coordenadas A(0, 0), B(4, 0) y C(4, 4); calcula la ecuación de la mediana que pasa por el vértice B.

31.- Los puntos A(−1, 3) y B(3, −3) son vértices de un triángulo isósceles que tiene su vértice C en la recta 2x − 4y + 3 = 0. Si AC y BC son los lados iguales, calcula las coordenadas del vértice C.

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

$5 = \sqrt{k^2 + 9} \qquad 25 = k^2 + 9 \qquad k = \pm 4$

Ejercicio nº 2.

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad \vec{w} = \frac{1}{5}(3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Ejercicio nº 3.-

$G\left(\frac{1-3-1}{3}, \frac{2+4+6}{3}\right) = G(-1, 4)$

Ejercicio nº 4.-

$2 = \frac{-3 + x_C}{2} \qquad 4 = -3 + x_C \qquad x_C = 7$

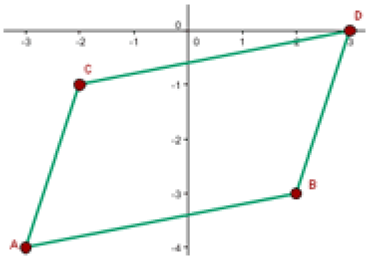
$C(7, -5)$

$-2 = \frac{1 + y_C}{2} \qquad -4 = 1 + y_C \qquad y_C = -5$

Ejercicio nº 5.-

$\frac{1+2}{6-1} = \frac{0+3}{5-0} \qquad \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \qquad$ *Sí*

Ejercicio nº 6.-



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$(4+1, -1+2) = (5 - x_D, 2 - y_D)$

$5 = 5 - x_D \qquad x_D = 0$

$D(0, 1)$

$1 = 2 - y_D \qquad y_D = 1$

Ejercicio nº 7.-

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

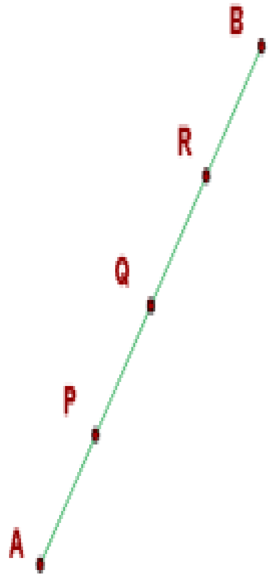
$(x-2, y+1) = \frac{1}{2}(8 - x, -4 - y)$

$x - 2 = \frac{1}{2}(8 - x) \qquad x = 4$

$C(4, -2)$

$y + 1 = \frac{1}{2}(-4 - y) \qquad y = -2$

Ejercicio nº 8.-



Q es el punto medio del segmento AB

$$Q\left(\frac{1+7}{2},\ \frac{3+5}{2}\right) = Q(4,\ 4)$$

P es el punto medio del segmento AQ

$$P\left(\frac{1+4}{2},\ \frac{3+4}{2}\right) = P\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\right)$$

R es el punto medio del segmento QB

$$R\left(\frac{4+7}{2},\ \frac{4+5}{2}\right) = R\left(\frac{11}{2},\ \frac{9}{2}\right)$$

Ejercicio nº 9.-

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$ $\qquad (2-4,\ 6+2) = (x-2,\ y-6)$

$x-2=-2 \qquad x=0$

$A'(0,\ 14)$

$y-6=8 \qquad y=14$

Ejercicio nº 10.-

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$ $\qquad (-2-3,\ 5+2) = (x+2,\ y-5)$

$x+2=-5 \qquad x=-7$

$A'(-7,\ 12)$

$y-5=7 \qquad y=12$

Ejercicio nº 11.-

$\frac{2}{3} = \frac{2+1+x}{3} \qquad x=-1$

$C(-1,\ -1)$

$0 = \frac{1+0+y}{3} \qquad y=-1$

Ejercicio nº 12.-

$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{3}{2} \qquad \overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \qquad (3-x,\ 2-y) = \frac{3}{2}(5-x,\ 4-y)$

$3-x = \frac{3}{2}(5-x) \qquad x=9$

$C(9,\ 8)$

$2-y = \frac{3}{2}(4-y) \qquad y=8$

Ejercicio nº 13.-

$|\vec{v}| = \sqrt{64+36} = 10$ $\qquad$ $\vec{u} = \frac{1}{10}(8, \; -6) = \left(\frac{4}{5}, \; -\frac{3}{5}\right)$

Ejercicio nº 14.-

Ecuación vectorial. $(x, y) = (-1, 3) + k \cdot (2, 5)$

Ecuaciones paramétricas. $\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 3 + 5k \end{cases}$

Ecuación continua. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5}$

Ejercicio nº 15.-

a) $y - 3 = \frac{5}{2}(x+1)$ $\qquad$ b) $m = \frac{2+3}{4+2} = \frac{5}{6}$; $y+3 = \frac{5}{6}(x+2)$ $\qquad$ c) $tg\ 45^{o} = 1$; $y + 3 = x + 2$

Ejercicio nº 16.-

a) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-5}{1}$ $\qquad$ $x - 1 = -2y + 10$ $\qquad$ $x + 2y - 11 = 0$

b) $y - 5 = -2(x-1)$ $\qquad$ $y - 5 = -2x + 2$ $\qquad$ $2x + y - 7 = 0$

Ejercicio nº 17.-

$y - 5 = -2(x-1)$ $\qquad$ $y - 5 = -2x + 2$ $\qquad$ $y = -2x + 7$

Ejercicio nº 18.-

$\frac{x-1}{2-1} - \frac{y-3}{-5-3}$ $\qquad$ $-8x + 8 - y - 3$ $\qquad$ $8x + y - 11 = 0$

Ejercicio nº 19.-

Ecuación que pasa por dos puntos $\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-2}{5-2}$

Ecuación vectorial $(x, y) = (1, 2) + k \cdot (-3, 3)$

Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 \quad 3k \\ y = 2 + 3k \end{cases}$ Ecuación continua $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{3}$

Ecuación general $x + y - 3 = 0$ Ecuación explícita $y = -x + 3$

Ecuación punto-pendiente $y - 2 = -1 \cdot (x - 1)$

__Ejercicio nº 20.-__

$3x+2y-7=0 \qquad y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2} \qquad m=-\frac{3}{2} \qquad b=\frac{7}{2}$

__Ejercicio nº 21.-__

Las rectas 1 y 4 son coincidentes, porque todos sus coeficientes son proporcionales: $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}$

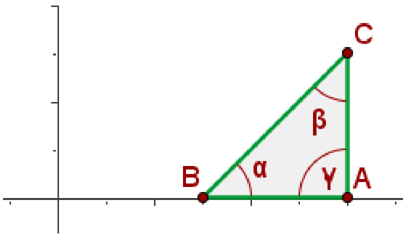
Las rectas 2 y 5 y las 1 y 6 son paralelas respectivamente, ya que existe proporcionalidad entre los coeficientes de x y de y, pero no en el término independiente.

$\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{1}{-6} \qquad \frac{2}{2}=\frac{3}{3}\neq\frac{-4}{9}$

__Ejercicio nº 22.-__

$\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-2} \qquad Sí \qquad \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \qquad r\cap s=P(0,2)$

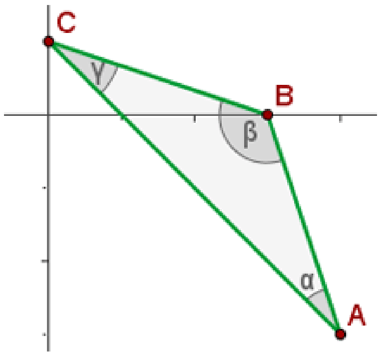
__Ejercicio nº 23.-__

a) 

$d(\overline{AB})=\sqrt{(3-6)^2+(0+0)^2}=3$

$d(\overline{BC})=\sqrt{(6-3)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2} \qquad d(\overline{AC})=\sqrt{(6-6)^2+(3-0)^2}=3$

$d(\overline{AB})=d(\overline{BC})\neq d(\overline{AC}) \qquad Isósceles\ ; \quad \left[d(\overline{BC})\right]^2-\left[d(\overline{AB})\right]^2+\left[d(\overline{AC})\right]^2 \qquad Rectángulo$

b) 

$d(\overline{AB})=\sqrt{(3-4)^2+(0-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

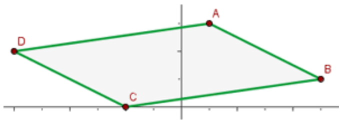
$d(\overline{BC})=\sqrt{(0-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$d(\overline{AC})=\sqrt{(0-4)^2+(1-3)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

$d(\overline{AB})=d(\overline{BC})\neq d(\overline{AC}) \qquad Isósceles$

$\left[d(\overline{AC})\right]^2>\left[d(\overline{AB})\right]^2+\left[d(\overline{BC})\right]^2 \qquad Obtusángulo$

Ejercicio nº 24.-



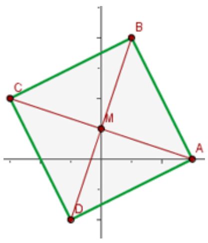
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $\qquad (x_D - 1, y_D - 3) = (-2 - 5, 0 - 1)$

$x_D - 1 = -7$

$D = (-6, 2)$

$y_D - 3 = -1$

Ejercicio nº 25.-



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\quad \overrightarrow{AB} = (1-3, 4-0) = (-2, 4) \quad \overrightarrow{DC} = (-3-(-1), 2-(-2)) = (-2, 4)$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad (-1-3,\ -2-0) = (-3-1,\ 2-4) \quad (-4,\ -2) = (-4,\ -2)$

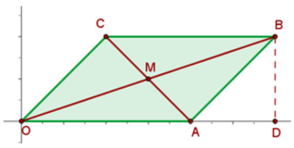
Es un paralelogramo   Las diagonales se cortan en el punto medio

$M\left(\dfrac{3-3}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right) \qquad M = (0, 1) \qquad \text{Área} = d(A,B) \cdot d(C, r_{AB})$

$d(A,B) = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5} \qquad \dfrac{x-3}{1-3} = \dfrac{y-0}{4-0} \qquad r_{AB} \equiv 2x + y - 6 = 0$

$d(C, r_{AB}) = \dfrac{|2 \cdot (-3) + 2 - 6|}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} \qquad A = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 20\ \ u^2$

Ejercicio nº 26.-



M es el punto medio de $\overline{OB}$ $\qquad (6,2) = \left(\dfrac{0+x_B}{2}, \dfrac{0+y_B}{2}\right) \qquad 6 = \dfrac{0+x_B}{2} \quad 2 = \dfrac{0+y_B}{2} \qquad B(12, 4)$

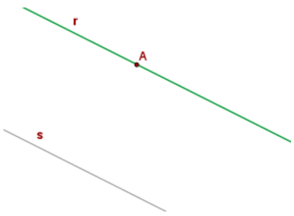
M es el punto medio de $\overline{AC}$ $\qquad (6,2) = \left(\dfrac{8+x_C}{2}, \dfrac{0-y_C}{2}\right) \qquad 6 = \dfrac{8+x_C}{2} \quad 2 = \dfrac{0+y_C}{2} \qquad C(4, 4)$

Ecuación de AC $\qquad \dfrac{x-8}{4-8} = \dfrac{y-0}{4-0} \qquad x + y - 8 = 0$

Ecuación de OB $\qquad \dfrac{x-12}{12-0} = \dfrac{y-4}{4-0} \qquad x - 3y = 0$

$AC = \sqrt{(4-8)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2} \qquad OB = \sqrt{(12-0)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{10}$

Ejercicio nº 27.-



$m_r = m_s = \frac{-2}{1}$ $\quad y - 5 = -2 \cdot (x - 1)$ $\quad 2x + y - 7 = 0$

Ejercicio nº 28.-

$r \parallel s$ $\quad m_r = m_s = \frac{2-1}{-2-4} = -\frac{1}{6}$ $\quad m_r = -\frac{1}{6}$ $\quad A(2, -3)$

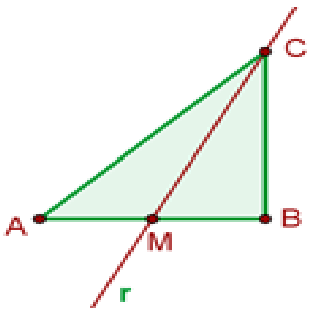
$y + 3 = -\frac{1}{6}(x - 2)$ $\quad x + 6y + 16 = 0$

Ejercicio nº 29.-

$A \in r$ $\quad 3 \cdot 3 + n \cdot 2 - 7 = 0$ $\quad n = -1$

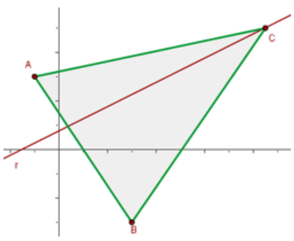
$r \parallel s$ $\quad \frac{3}{m} = \frac{-1}{2}$ $\quad m = -6$

Ejercicio nº 30.-



$M_{AB}\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ $\quad M_{AB}(2, 0)$ $\quad B(4, 0)$ $\quad \frac{x-2}{4-2} = \frac{y-0}{4-0}$ $\quad 2x - y - 4 = 0$

Ejercicio nº 31.-



$C \in r$ $\quad 2x_c - 4y_c + 3 = 0$

$d(\overline{AC}) = d(\overline{BC})$ $\quad \sqrt{(x_c + 1)^2 + (y_c - 3)^2} = \sqrt{(x_c - 3)^2 + (y_c + 3)^2}$

$2x_c - 3y_c - 2 = 0$ $\quad \begin{cases} 2x_c - 4y_c + 3 = 0 \\ 2x_c - 3y_c - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad C\left(\frac{17}{2}, 5\right)$