8 Propiedades métricas

1. Determina el ángulo formado por las rectas r: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ y s: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$

2. Determina el ángulo formado por los planos α: $2x + 3y - z + 6 = 0$ y β: $2y - z + 5 = 0$.

3. Determina el ángulo que forma la recta r: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-10}{-2}$ con el plano α: $2x - y = 0$.

4. Escribe la ecuación de la recta perpendicular al plano α: $2x - y + z = 3$ y que pasa por el punto $P(-1, 0, 3)$.

5. Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta r: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = -t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(0, -1, 2)$.

6. Calcula la distancia que separa al punto $P(1, -2, 3)$ del plano α: $2x + y + z + 3 = 0$.

7. Calcula la distancia que separa al punto $P(1, 0, -3)$ de la recta r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$

8. Dadas las rectas r: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ y s: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$

a) Demuestra que son paralelas.

b) Calcula la distancia que separa a ambas rectas.

9. Dados los planos α: $x + y + z = 0$ y β: $2x + 2y + 2z + 3 = 0$:

a) Demuestra que son paralelos.

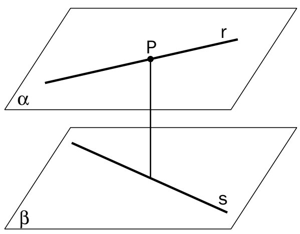
b) Calcula la distancia que separa a ambos planos.

10. Dadas las rectas r: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ y s: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

a) Demuestra que se cruzan.

b) Escribe la ecuación del plano β que contiene a s y es paralelo a r.

c) Demuestra que $P(2, 2, -2)$ es un punto de r y calcula la distancia que separa a P de β. ¿Cómo será esta distancia en relación a la distancia que separa a las rectas r y s?



SOLUCIONES

1. Vectores directores de r y de s:
$\vec{u}_r = (1, -1, 2)$ y $\vec{u}_s = (2, -1, -1)$

$$\cos\widehat{(r, s)} = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{(r, s)} = \arccos\frac{1}{6} \approx 80° \ 24'$$

2. Vectores normales de α y de β:
$\vec{n}_\alpha = (2, 3, -1)$ y $\vec{n}_\beta = (0, 2, -1)$

$$\cos\widehat{(\alpha, \beta)} = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{70}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{(\alpha, \beta)} = \arccos\frac{7}{\sqrt{70}} \approx 33° \ 13'$$

3. Vector normal de α: $\vec{n}_\alpha = (2, -1, 0)$
Vector director de r: $\vec{u}_r = (1, 1, -2)$

$$\operatorname{sen}\widehat{(\alpha, r)} = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{u}_r|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{30}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{(\alpha, r)} = \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{30}} \approx 10° \ 31'$$

4. El vector normal del plano es un vector director de la recta.

Por tanto: $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$

5. El vector director de la recta es un vector normal del plano. Por tanto:

$\alpha: -x - 3y - z + D = 0$

Como $P \in \alpha \Rightarrow 3 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha: x + 3y + z + 1 = 0$

6. Punto del plano: $A_\alpha\,(0, 0, -3)$
Vector normal del plano: $\vec{n}_\alpha = (2, 1, 1)$
$\overrightarrow{A_\alpha P} = (1, -2, 6)$

$$d(P, \alpha) = \frac{|\overrightarrow{A_\alpha P} \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{n}_\alpha|} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

7. Punto de la recta: $A_r\,(1, 2, 0)$
Vector director de la recta: $\vec{u}_r = (1, -1, 1)$
$\overrightarrow{A_r P} = (0, -2, -3)$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{A_r P} \cdot \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

8. a) Vectores directores de r y de s:

$\vec{u}_r = (1, -2, 1)$ y $\vec{u}_s = (1, -2, 1)$

Al ser iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Como el punto $A\,(0, 0, 1)$ pertenece a r pero no a s, se deduce que r y s son paralelas.

b) Si $P\,(1, 1, 0)$ es un punto de s:

$$d(r, s) = d(A, s) = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

9. a) Los vectores normales a los planos son proporcionales; por tanto, los planos son paralelos ya que no son coincidentes (α pasa por el origen y β no).

b) Si $O\,(0, 0, 0)$ es uno de los puntos de α y $A_\beta\left(0, 0, -\dfrac{3}{2}\right)$ un punto de β:

$$d(\alpha, \beta) = d(O, \beta) = \frac{|\overrightarrow{A_\beta O} \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\beta|} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

10. a) $A_r(0, 0, 0) \qquad A_s(1, 0, 0)$

$\vec{u}_r = (1, 1, -1) \qquad \vec{u}_s = (1, 1, 1)$

$\overrightarrow{A_r A_s} = (1, 0, 0)$

rango $(\vec{u}_r, \vec{u}_s) = 2$ y rango $(\overrightarrow{A_r A_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

b) $$\beta(A_s, \vec{u}_r, \vec{u}_s) \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \beta: x - y - 1 = 0$

c) $\dfrac{2}{1} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{-2}{-1} \Rightarrow P \in r$

$$d(P, \beta) = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$d(P, \beta) = d(r, s)$