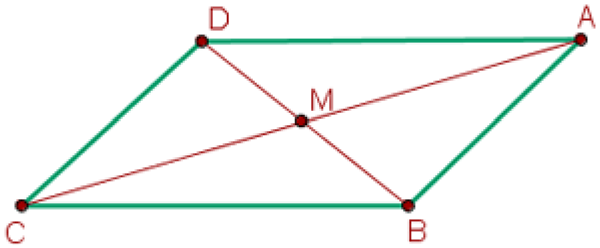
MATEMATICAS. BC2 TEMA 6: Rectas y Planos en R^3

1. Las coordenadas de los vértices consecutivos de un paralelogramo son A (1, 0, 0) y B(0, 1, 0). Las coordenadas del centro M son M(0, 0, 1). Hallar las coordenadas de los vértices C y D.
2. Dado el triángulo de vértices A(2, 3, 4), B(1, −1, 5) y C(5, 5, 4), hallar:
   a) Las ecuaciones de las medianas del triángulo.
   b) Las coordenadas del baricentro del triángulo.
3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2, 3, 4) y B (8, −2, 3). Estudiar si el punto C (2, 1, 3) está alineado con A y B.
4. Determinar los valores de m para que los puntos A (m, 2, −3), B (2, m, 1) y C (5, 3, −2) estén alineados y hallar las ecuaciones de la recta que los contiene.
5. Calcular el valor de a para que los puntos (a, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 2, 3) y (7, 2, 1) sean coplanarios. Calcular también la ecuación del plano que los contiene.
6. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto (1, 0, 2) y se apoya en las rectas:
   $$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \qquad s \equiv \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$$
7. Estudiar para los valores de a la posición relativa de los siguientes planos:
   p1: ax+y+z = 1 p2: x+ay+z = 1 p3: x+y+az = 1
8. Estudiar según los valores del parámetro a las posiciones relativas de:
   $$\pi \equiv x + ay - z = 1 \qquad r \equiv \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$$
9. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ con el plano $\pi \equiv x - 2y + 5z + 1 = 0$ y es paralelo a las rectas $s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ y $t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{-2}$
10. Hallar el área del triángulo de vértices A (1, 1, 1), B (3, 2, 1) y C (−1, 3, 2).
11. Volumen del tetraedro de vértices A(0,0,0), B(2, 1, 3), C(−1, 3, 1) y D(4, 2, 1).
12. Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 4 = 0$, hallar la ecuación de la recta s, proyección ortogonal de r sobre π.
13. Calcular la distancia entre las rectas: $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{4}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases}$.
14. Hallar el simétrico del punto A (3, 2, 1) respecto del plano $x + y + z + 21 = 0$.
15. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x + 3y + 2z = 6$ con los ejes coordenados.
16. Dado el plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y + 3z = 1$ y el punto A (1, 1, 1), hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde A a ese plano.
17. Determinar la ecuación del plano π que está a $\sqrt{6}$ de distancia del origen y es paralelo a aquel que tiene por ecuación $2x + y - z = 3$.
18. Sabiendo que los lados de un cuadrado están en las rectas r y s, calcula su área:
   $$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad s \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases}$$

SOLUCIONES

Ejercicio 1.-



$$(0,0,1)=\left(\frac{1+x_C}{2},\frac{0+y_C}{2},\frac{0+z_C}{2}\right) \qquad 0=\frac{1+x_C}{2} \qquad 0=\frac{0+y_C}{2} \qquad 1=\frac{0+z_C}{2}$$

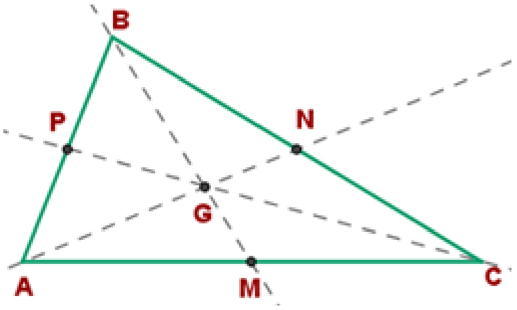
$$x_C=-1 \qquad y_C=0 \qquad z_C=2 \qquad C(-1,0,2)$$

$$(0,0,1)=\left(\frac{0+x_D}{2},\frac{1+y_D}{2},\frac{0+z_D}{2}\right) \qquad 0=\frac{0+x_D}{2} \qquad 0=\frac{1+y_D}{2} \qquad 1=\frac{0+z_D}{2}$$

$$x_D=0 \qquad y_D=-1 \qquad z_D=2 \qquad D(0,-1,2)$$

Ejercicio 2.-

1. Las ecuaciones de las **medianas del triángulo**.



$$P\left(\frac{2+1}{2},\frac{3-1}{2},\frac{4+5}{2}\right) \qquad P\left(\frac{3}{2},1,\frac{9}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{2+5}{2},\frac{3+5}{2},\frac{4+4}{2}\right) \qquad M\left(\frac{7}{2},4,4\right)$$

$$N\left(\frac{1+5}{2},\frac{-1+5}{2},\frac{5+4}{2}\right) \qquad N\left(3,2,\frac{9}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{NA}=\left(2-3,3-2,4-\frac{9}{2}\right)=\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MB}=\left(1-\frac{7}{2},-1-4,5-4\right)=\left(-\frac{5}{2},-5,1\right)$$

$$\overrightarrow{PC}=\left(5-\frac{3}{2},5-1,4-\frac{9}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},4,-\frac{1}{2}\right)$$

$$A(2,3,4) \qquad \overrightarrow{NA}=\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right) \qquad r\equiv\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=4-\frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

$$B(1,-1,5) \qquad \overrightarrow{MB}=\left(-\frac{5}{2},-5,1\right) \qquad s\equiv\begin{cases} x=1-\frac{5}{2}\lambda \\ y=-1-5\lambda \\ z=5+\lambda \end{cases}$$

$$C(5,5,4) \qquad \overrightarrow{PC}=\left(\frac{7}{2},4,-\frac{1}{2}\right) \qquad t\equiv\begin{cases} x=5+\frac{7}{2}\lambda \\ y=5+4\lambda \\ z=4-\frac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

2. Las **coordenadas** del **baricentro** del triángulo.

$$G\left(\frac{2+1+5}{3},\frac{3-1+5}{3},\frac{4+5+4}{3}\right) \qquad G\left(\frac{8}{3},\frac{7}{3},\frac{13}{3}\right)$$

<u>*Ejercicio 3.-*</u>

$$\overrightarrow{AB}=(8-2,-2-3,3-4)=(6,-5,-1) \qquad \frac{x-2}{6}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-4}{-1}$$

Para que el punto C este alineado con A y B, debe pertenecer a la recta que pasa por A y B.

$$\frac{2-2}{6}\neq\frac{1-3}{-5}\neq\frac{3-4}{-1}$$

Como C no satisface las ecuaciones de la recta, **no está alineado** con A y B.

<u>*Ejercicio 4.-*</u>

$$\overrightarrow{BC}=(5-2,3-m,-2-1)=(3,3-m,-3) \qquad rang\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)=1$$

$$\begin{pmatrix}5-m & 1 & 1\\ 3 & 3-m & -3\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}5-m & 1\\ 3 & -3\end{vmatrix}=0 \qquad -15+3m-3=0 \qquad m=6$$

<u>*Ejercicio 5.-*</u>

$$rang\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)=2 \qquad \overrightarrow{BA}=(a-0,0-1,1-2)=(a,-1,-1)$$

$$\overrightarrow{BC}=(1-0,2-1,3-2)=(1,1,1) \qquad \overrightarrow{BD}=(7-0,2-1,1-2)=(7,1,-1)$$

$$\begin{vmatrix}a & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 7 & 1 & -1\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{array}{l}-a-7-1+7-1-a=0\\ -2a-2=0 \qquad a=-1\end{array}$$

$$B(0,1,2) \qquad \overrightarrow{BC}=(1,1,1) \qquad \overrightarrow{BD}=(7,1,-1)$$

$$\begin{vmatrix}x & 1 & 7\\ y-1 & 1 & 1\\ z-2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{array}{l}-2x+8y-6z+4=0\\ x-4y+3z-2=0\end{array}$$

<u>*Ejercicio 6.-*</u>

Obtenemos un punto genérico de la recta r.

$$\frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1} \qquad \begin{cases}x=3\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=\lambda\end{cases} \qquad P(3\lambda,-2+\lambda,\lambda)$$

Obtenemos un punto genérico de la recta s.

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1} \qquad \begin{cases}x=-1+6\lambda\\ y=-\lambda\\ z=\lambda\end{cases} \qquad Q(-1+6\mu,-2\mu,\mu)$$

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por P y Q.

$$\frac{x-3\lambda}{-1+6\mu-3\lambda}=\frac{y+2-\lambda}{-2\mu+2-\lambda}=\frac{z-\lambda}{\mu-\lambda}$$

Como la recta pasa por el punto (1, 0, 2), tendremos:

$$\frac{1-3\lambda}{-1+6\mu-3\lambda}=\frac{2-\lambda}{-2\mu+2-\lambda}=\frac{2-\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1-3\lambda}{-1+6\mu-3\lambda}=\dfrac{2-\lambda}{-2\mu+2-\lambda}\\ \dfrac{2-\lambda}{-2\mu+2-\lambda}=\dfrac{2-\lambda}{\mu-\lambda}\end{cases} \qquad \begin{cases}3\lambda\mu-11\mu+4\lambda+2=0\\ 3\mu-2=0\end{cases}$$

$$\lambda=\frac{8}{9} \qquad \mu=\frac{2}{3}$$

Sustituimos estos dos valores en la ecuación de la recta:

$$\frac{x-3\cdot\frac{8}{9}}{-1+6\cdot\frac{2}{3}-3\cdot\frac{8}{9}}=\frac{y+2-\frac{8}{9}}{-2\cdot\frac{2}{3}+2-\frac{8}{9}}=\frac{z-\frac{8}{9}}{\frac{2}{3}-\frac{8}{9}}$$

Operamos y simplificamos.

$$\frac{9x-24}{3}=\frac{9y+10}{-2}=\frac{9z-8}{-2}$$

Ejercicio 7.-

$$\pi_1 \equiv ax+y+z=1 \qquad \pi_2 \equiv x+ay+z=1 \qquad \pi_3 \equiv x+y+az=1$$

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

En el determinante de la matriz de los coeficientes sumamos a la primera fila las otras dos y posteriormente sacamos factor común.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}==(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$$

$\text{Si } a \neq -2, a \neq 1$ $\quad r(M)=r(M')=3$ Los tres planos se cortan en un punto.

$\text{Si } a=1$ Las tres ecuaciones son idénticas, los tres planos son coincidentes.

$\text{Si } a=-2$

$$M=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0 \qquad r(M)=2$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \qquad r(M')=3$$

Como no hay ningún par de planos paralelos, los **tres planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática**.

Ejercicio 8.-

$$\begin{cases} x+ay-z=1 \\ 2x+y-az=2 \\ x-y-z=a-1 \end{cases} \qquad M=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \qquad -a^2+a+2=0 \qquad a=\begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$\text{Si } a \neq 2, a \neq -1$

$r(M)=r(M')=3$

La recta corta al plano en un solo punto.

$\text{Si } a=2$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(M) = 2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad r(M') = 2$$

La recta está contenida en el plano.

Si $a = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad r(M') = 3$$

La recta es paralela al plano.

<u>Ejercicio 9.-</u>

Las ecuaciones continuas de la recta r se pasan a implícitas, y éstas junto a la ecuación del plano forman un sistema, cuya solución es el punto de intersección.

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ -x - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 5z + 1 = 0 \end{cases} \qquad x = 1 \quad y = 1 \quad z = 0$$

El plano viene determinado por el punto de intersección y los vectores directores de las rectas paralelas al plano.

$$A(1,1,0) \qquad \vec{u} = (-1,2,1) \qquad \vec{v} = (1,1,-2)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad -5x - y - 3z + 6 = 0$$

<u>Ejercicio 10.-</u>

$$\overrightarrow{AB} = (3-1, 2-1, 1-1) = (2,1,0) \qquad \overrightarrow{AC} = (-1-1, 3-1, 2-1) = (-2,2,1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} \qquad \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{41} \qquad A_T = \frac{1}{2}\sqrt{41}\,u^2$$

<u>Ejercicio 11.-</u>

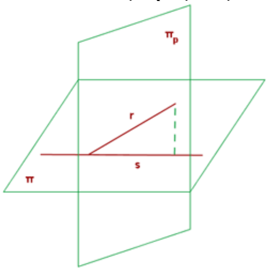
$$\overrightarrow{AB} = (2-0, 1-0, 3-0) = (2,1,3) \quad \overrightarrow{AC} = (-1-0, 3-0, 1-0) = (-1,3,1) \quad \overrightarrow{AD} = (4-0, 2-0, 1-0) = (4,2,1)$$

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{35}{6}\,u^3$$

<u>Ejercicio 12.-</u>

La recta s es la intersección del plano π con el plano π_p que contiene a la recta r y es perpendicular a π.

El plano π_p queda determinado por el punto A(2, −1, 0), el vector (2, 1, 1) y el vector normal, (1, 1, 1), del plano perpendicular π.



$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -y + z - 1 = 0 \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ -y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

<u>Ejercicio 13.-</u>

$$A(2,2,-1) \qquad \vec{u} = (3,-1,4)$$

$$B(5,-1,8) \qquad \vec{v} = (1,0,2)$$

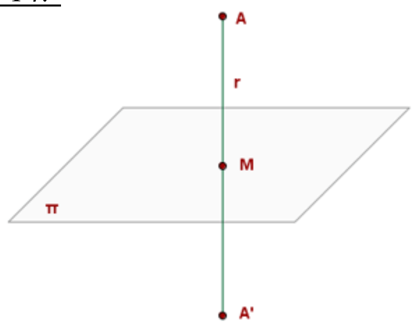
$$\overrightarrow{AB} = (5-2, 2+1, 8+1) = (3,-3,9)$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 9$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \qquad d(r,s) = \frac{9}{3} = 3$$

Ejercicio 14.-



En primer lugar calculamos r, que es la recta que pasa por A y es perpendicular a π.

$$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$$

Hallamos el punto de intersección de la recta r y el plano π.

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \\ x + y + z + 21 = 0 \end{cases} \qquad M(-6,-7,-8)$$

Teniendo en cuenta las **coordenadas del punto medio de un segmento**, podemos hallar el extremo A'.

$$-6 = \frac{3+x}{2} \qquad -7 = \frac{2+y}{2} \qquad -8 = \frac{1+z}{2} \qquad A'(-15,-16,-17)$$

Ejercicio 15.-

$$y = 0,\ z = 0 \rightarrow \quad x = 1 \qquad A(1,0,0)$$

$$x = 0,\ z = 0 \rightarrow \quad y = 2 \qquad B(0,2,0)$$

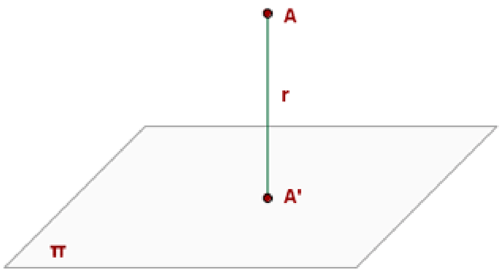
$$x = 0,\ y = 0 \rightarrow \quad z = 3 \qquad C(0,0,3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 2-0, 0-0) = (-1,2,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 0-0, 3-0) = (-1,0,3)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \qquad A_T = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{7}{2}u^2$$

Ejercicio 16.-



$$A(1,1,1) \qquad \vec{u}_r = \vec{n} = (1,2,3)$$

$$r \equiv \begin{cases} 1 + \lambda \\ 1 + 2\lambda \\ 1 + 3\lambda \end{cases}$$

El pie de la perpendicular es el punto de intersección entre el plano y la recta.

$$(1+\lambda)+2(1+2\lambda)+3(1+3\lambda)=1 \qquad \lambda=-\frac{5}{14} \qquad A'\left(\frac{9}{14},\frac{4}{14},\frac{-1}{14}\right)$$

Ejercicio 17.-

$$2x+y-z+k=0 \qquad d(O,\pi)=\frac{|0+0-0+k|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

$$k=\sqrt{6} \qquad k=-\sqrt{6} \qquad \pi_1\equiv 2x+y-z+\sqrt{6}=0 \qquad \pi_1\equiv 2x+y-z-\sqrt{6}=0$$

Ejercicio 18.-

Determinación lineal de la recta r.

$$A(1,0,2) \qquad \vec{u}=(1,2,1)$$

Determinación lineal de la recta s.

$$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\begin{array}{r} x-y+z=2\\ -3x+y+z=4\\ \hline -2x\quad +2z=6\end{array} \qquad x=0 \quad z=3 \quad y=1$$

$$B(0,1,3) \qquad \vec{v}=(2,4,2) \qquad \overrightarrow{AB}=(0-1,1-0,3-2)=(-1,1,1)$$

La distancia de la r a la recta s es igual a la distancia del punto B a la recta r.

$$\overrightarrow{AB}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{i}+3\vec{k} \qquad d(B,r)=\frac{\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s.

$$A_{\square}=\frac{7}{3}u^2$$