5 Los vectores del espacio

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(5, -3, 2) + (-3, -1, -1)$

b) $(-2, 4, 1) + (-1)\,[(2, -1, 2) + (-1)\,(-3, -4, 0)]$

c) $(-2)\,(3, -3, 3) + 3(-3, 3, 0) + (1, 0, -1)$

d) $3\,[2(-2, 3, 2) + (-2)\,(3, -4, 1)] + (-1, -2, 0)$

2. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 3)$, calcula:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.

b) El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) La medida del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

e) La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (x, -3, 1)$ y $\vec{v} = (1 + x, 1, -3)$:

a) Calcula los posibles valores de x que hacen que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

b) Calcula el valor del producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para $x = -1$.

4. Escribe un vector paralelo al que tiene por coordenadas $\vec{u} = (-1, 2, -2)$ y que sea unitario, es decir, que su módulo sea la unidad.

5. Escribe un vector paralelo al que tiene por origen el extremo del vector $\overrightarrow{OA} = (-1, 2, 0)$ y por extremo el extremo del vector $\overrightarrow{OB} = (2, 0, -1)$ y que, además, tenga por módulo 2 unidades de longitud.

6. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$:

a) Calcula el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

b) Calcula el área del paralelogramo determinado por ambos vectores.

7. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1, 0)$, $\vec{v} = (2, 2, -1)$ y $\vec{w} = (-1, 1, 2)$:

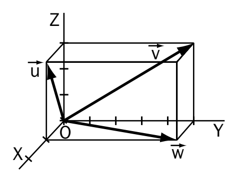
a) Calcula el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

b) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

8. Calcula los valores de x e y para que el vector $\vec{u} = (1 + x)\,\vec{i} + y\vec{j} - 2\vec{k}$ sea ortogonal a los vectores $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

9. Calcula los posibles valores de x que hacen que la proyección del vector $\vec{u} = (-1, 2, 2 - x)$ sobre el vector $\vec{v} = (1, x, 2)$ sea igual a la unidad.

10. Dada la figura:



a) Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

SOLUCIONES

1. a) $(5 - 3, -3 -1, 2 - 1) = (2, -4, 1)$

b) $(-2, 4, 1) - [(2, -1, 2) + (3, 4, 0)] =$
$= (-2, 4, 1) - (5, 3, 2) = (-7, 1, -1)$

c) $(-6, 6, -6) + (-9, 9, 0) + (1, 0, -1) =$
$= (-14, 15, -7)$

d) $3\,[(-4, 6, 4) + (-6, 8, -2)] + (-1, -2, 0) =$
$= 3\,(-10, 14, 2) + (-1, -2, 0) =$
$= (-30, 42, 6) + (-1, -2, 0) = (-31, 40, 6)$

2. a) $|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 3$

c) $\cos(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}} = \dfrac{3}{\sqrt{55}}$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \text{arccos}\,\dfrac{3}{\sqrt{55}} \approx 66°\ 8'\ 20''$

d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$

e) Proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

3. a) Como los vectores dados son no nulos, se verifica que $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x(1 + x) - 3 - 3 = x^2 + x - 6 = 0$
$\Rightarrow x = 2, x = -3$

b) $\vec{u} = (-1, -3, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, -3) \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 - 3 - 3 = -6$

4. $|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$

Uno de los dos vectores cuya dirección es la de $\vec{u}$ y cuyo módulo es 1 es:

$\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{-2}{3}\right)$

5. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, -2, 1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

$\vec{v} = \dfrac{2\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \left(\dfrac{6}{\sqrt{14}}, \dfrac{-4}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}\right)$

6. a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (2, 4, -1)$

b) $S = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} =$
$= \sqrt{21} \approx 4{,}58$

7. a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -13$

b) $V = |\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\,| = |-13| = 13$

8. a) $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{v} \times \vec{w} = (-5, -6, 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1 + x}{-5} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{-2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{3}{2}, y = 3$

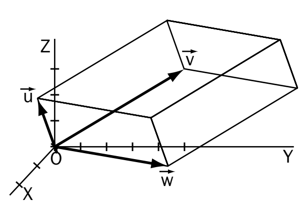
9. Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} =$

$= \dfrac{-1 + 2x + 4 - 2x}{\sqrt{1 + x^2 + 4}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 5} = 3 \Rightarrow x^2 + 5 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2, x = -2$

10.



a) $\vec{u} = (1, 0, 3)$, $\vec{v} = (0, 5, 3)$ y $\vec{w} = (1, 5, 0)$

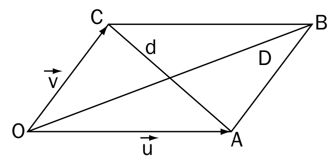
b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 - 15 = -30 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = |\,[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\,| = |-30| = 30$

5 Los vectores en el espacio

1. Consideramos tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tales que $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = 0$. Demuestra que si se toman representantes de esos tres vectores con un mismo origen entonces sus extremos están alineados.

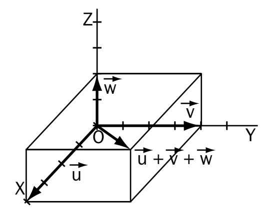
2. Dado el paralelogramo de la figura:



a) Escribe los vectores $\vec{D}$ y $\vec{d}$, correspondientes a sus diagonales, en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, correspondientes a sus lados.

b) Con ayuda del cálculo vectorial, demuestra que la suma de los cuadrados de las medidas de las diagonales es igual al doble de la suma de los cuadrados de las medidas de dos de sus lados concurrentes.

3. Los módulos de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son 4, 4 y 2, respectivamente. Se sabe, además, que dichos vectores son perpendiculares dos a dos:

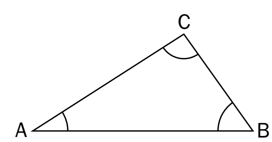


a) Determina el vector suma de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Determina el módulo del vector suma.

c) Calcula el valor de los ángulos que el vector suma forma con cada uno de los vectores considerados.

4. Consideramos el triángulo de vértices A, B y C:



a) Considerando los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$. Con ayuda del producto vectorial, escribe el área del triángulo ABC en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, en función de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ y en función de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) Con ayuda del apartado anterior, demuestra el teorema de los senos.

5. Se consideran los vectores $a = 2\vec{i} + x\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + x\vec{j}$ y $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + x\vec{k}$:

a) Calcula los posibles valores de x que hacen que el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores sea igual a 10.

b) Estudia si existe algún valor de x que haga que los tres vectores sean coplanarios.

6. Se considera el vector de coordenadas $\vec{u} = (-1, 1, 1)$:

a) Halla, con ayuda de los parámetros necesarios, la expresión de todos los vectores ortogonales a $\vec{u}$.

b) Escribe el vector $\vec{a} = (-3, 0, 3)$ como suma de dos vectores, uno de los cuales sea paralelo a $\vec{u}$ y el otro ortogonal a $\vec{u}$.

7. Se consideran los vectores de coordenadas $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (4, 2, x)$:

a) Calcula el valor de x que hace que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Para el valor de x calculado en el apartado anterior, expresa el vector $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{u}$ como producto de un número real por el vector $\vec{v}$.

SOLUCIONES

1. Se considera $\vec{u} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{v} = [\overrightarrow{OB}]$ y $\vec{w} = [\overrightarrow{OC}]$. Hay que demostrar que A, B y C están alineados:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u} + \overrightarrow{AB} = \vec{v}\\ \vec{u} + \overrightarrow{AC} = \vec{w}\end{array}\right\}$$

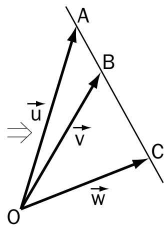
Como $\vec{u} = -2\vec{v} + 3\vec{w} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2(\vec{u} + \overrightarrow{AB}) + 3(\vec{u} + \overrightarrow{AC}) = \vec{u} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$, B y C están alineados.



2. a) $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{D} = \overrightarrow{OB}$ y $\vec{d} = \overrightarrow{CA} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{D} = \vec{u} + \vec{v}$; $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$

b) $$\left\{\begin{array}{l}\vec{D}\cdot\vec{D} = |\vec{D}|^2 = (\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) =\\ \vec{d}\cdot\vec{d} = |\vec{d}|^2 = (\vec{u} - \vec{v})\cdot(\vec{u} - \vec{v}) =\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}\\ = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |\vec{D}|^2 + |\vec{d}|^2 = 2(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2)$

3. a) Se pueden tomar como direcciones de los tres vectores dados las de los ejes coordenados.

Entonces: $\vec{u} = 4\vec{i}$, $\vec{v} = 4\vec{j}$, $\vec{w} = 2\vec{k}$, y el vector suma viene determinado por las coordenadas $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (4, 4, 2)$

b) $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$

c) $\cos(\vec{s}, \vec{u}) = \dfrac{\vec{s}\cdot\vec{u}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{u}|} = \dfrac{16}{6\cdot 4} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{(\vec{s}, \vec{u})} = \arccos\dfrac{2}{3} \approx 48°\ 11'\ 23''$

$\cos(\vec{s}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{s}\cdot\vec{v}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{16}{6\cdot 4} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{(\vec{s}, \vec{v})} \approx 48°\ 11'\ 23''$

$\cos(\vec{s}, \vec{w}) = \dfrac{\vec{s}\cdot\vec{w}}{|\vec{s}|\cdot|\vec{w}|} = \dfrac{4}{6\cdot 2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{(\vec{s}, \vec{w})} \approx 70°\ 31'\ 44''$

4. a) $S = \dfrac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \dfrac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{w}| = \dfrac{1}{2}|\vec{v}\times\vec{w}|$

b) $\dfrac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = \dfrac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{w}| \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}\times\vec{w}| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\text{sen}\,(180° - B) =\\ |\vec{u}\times\vec{w}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{w}|\cdot\text{sen}\,(180° - A) =\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}= |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\text{sen}\,B\\ = |\vec{u}|\cdot|\vec{w}|\cdot\text{sen}\,A\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|\vec{v}|}{\text{sen}\,A} = \frac{|\vec{w}|}{\text{sen}\,B}$$

De la misma manera: $\dfrac{|\vec{v}|}{\text{sen}\,A} = \dfrac{|\vec{u}|}{\text{sen}\,C}$

De estas dos igualdades se deduce:

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C}$$

5. a) $\begin{vmatrix}2 & x & 3\\ 1 & x & 0\\ 1 & 2 & x\end{vmatrix} = 10 \Rightarrow 2x^2 + 6 - 3x - x^2 = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4,\ x = -1.$

b) Para que los vectores sean coplanarios, su producto mixto debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix}2 & x & 3\\ 1 & x & 0\\ 1 & 2 & x\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 6 - 3x - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 6 = 0$

Esta ecuación no tiene soluciones reales.

6. a) $(a, b, c)\cdot(-1, 1, 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -a + b + c = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a = \lambda + \mu\\ b = \lambda\\ c = \mu\end{array}\right.$$

Los vectores pedidos son de la forma $(\lambda + \mu, \lambda, \mu)$.

b) $(-3, 0, 3) = (-x, x, x) + (\lambda + \mu, \lambda, \mu) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl}-x + \lambda + \mu &=& -3\\ x + \lambda \quad &=& 0\\ x \quad + \mu &=& 3\end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow -x - x + 3 - x = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2,\ \lambda = -2,\ \mu = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-3, 0, 3) = (-2, 2, 2) + (-1, -2, 1)$

7. a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (-1, 1, 1)\cdot(4, 2, x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 + 2 + x = 0 \Rightarrow x = 2$

b) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 2\end{vmatrix} = 6\vec{j} - 6\vec{k}$

$\vec{u}\times\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 6 & -6\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 12\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$

Por tanto: $\vec{u}\times\vec{v}\times\vec{u} = 3\vec{v}$