EJERCICIOS PROPUESTOS

6.1 Indica la medida de estos ángulos en radianes.

a) 0º **b) 45º** **c) 60º** **d) 120º**

a) $0º = 0 \text{ rad}$

b) $\frac{2\pi\text{rad}}{360º} = \frac{x}{45º} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 45}{360} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

c) $\frac{2\pi\text{rad}}{360º} = \frac{x}{60º} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 60}{360} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

d) $\frac{2\pi\text{rad}}{360º} = \frac{x}{120º} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 120}{360} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

6.2 Expresa en grados los siguientes ángulos.

a) $\frac{\pi}{6}$ rad **b) 0,8 rad** **c) $\frac{3\pi}{4}$ rad** **d) 3π rad**

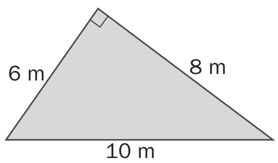
a) $\frac{360º}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{\pi}{6}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot \pi}{12\pi} = 30º$

b) $\frac{360º}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{0{,}8 \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{288}{2\pi} = \frac{144}{\pi} = 45{,}86º = 45º\ 51'\ 35''$

c) $\frac{360º}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{3\pi}{4}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{1080 \cdot \pi}{8\pi} = 135º$

d) $\frac{360º}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{3\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{1080 \cdot \pi}{2\pi} = 540º$

6.3 Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud.



$\text{sen } \alpha = \frac{6}{10} = 0{,}6$

$\cos \alpha = \frac{8}{10} = 0{,}8$

$\text{tg } \alpha = \frac{6}{8} = 0{,}75$

6.4 Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa y uno de sus catetos miden 13 y 5 centímetros, respectivamente.

Para calcular el otro cateto usamos el teorema de Pitágoras:

$x^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$

$\text{sen } \alpha = \frac{12}{13} = 0{,}923$ $\cos \alpha = \frac{5}{13} = 0{,}385$ $\text{tg } \alpha = \frac{12}{5} = 2{,}4$

$\text{sen } \beta = \frac{5}{13} = 0{,}385$ $\cos \beta = \frac{12}{13} = 0{,}923$ $\text{tg } \beta = \frac{5}{12} = 0{,}417$

6.5 Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo sabiendo que:

a) $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ **b) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$**

a) $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{22}{25} \Rightarrow \cos \alpha \frac{\sqrt{22}}{5}$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{\sqrt{22}}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{66}}{22}$

b) $\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

6.6 **La tangente de un ángulo agudo α es igual a $\frac{4}{3}$. Halla sen α y cos α.**

$$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{16}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow = \frac{9}{25} = \cos^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$$

6.7 **Simplifica la siguiente expresión: $(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha) + (\text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha)$.**

$$(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha) + (\text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha) = 2\text{sen}^2\,\alpha$$

6.8 **Calcula las razones trigonométricas de estos ángulos.**

a) π rad **b) 270º**

a) $\text{sen}\,\pi = \frac{0}{1} = 0$ $\cos\pi = \frac{-1}{1} = -1$ $\text{tg}\,\pi = \frac{0}{-1} = 0$

b) $\text{sen}\,270º = \frac{-1}{1} = -1$ $\cos 270º = \frac{0}{1} = 0$ $\text{tg}\,270º = \frac{-1}{0} = \infty$

6.9 **La tangente de un ángulo del tercer cuadrante es tg α = 4. Halla las otras dos razones trigonométricas de este ángulo.**

Tercer cuadrante sen $\alpha < 0$, cos $\alpha < 0$, tg $\alpha > 0$; tomaremos las raíces negativas.

$$4^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{17} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17} \qquad 4 = \frac{\text{sen}\,\alpha}{-\frac{\sqrt{17}}{17}} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

6.10 **Calcula el valor de las siguientes razones trigonométricas.**

a) sen $\frac{5\pi}{6}$ **b) cos $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$**

a) $\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ b) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

6.11 **Halla las razones trigonométricas de estos ángulos.**

a) 150º **c) 225º**

b) −120º **d) 300º**

a) $\text{sen}\,150º = \text{sen}\,(180 - 30) = \text{sen}\,30º = \frac{1}{2}$ $\cos 150º = \cos(180 - 30) = -\cos 30º = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\,150º = \text{tg}\,(180 - 30) = -\text{tg}\,30º = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{sen}\,(-120º) = -\text{sen}\,(120º) = -\text{sen}\,(180 - 60) = -\text{sen}\,60º = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-120º) = \cos(120º) = \cos(180 - 60) = -\cos 60º = -\frac{1}{2}$

$\text{tg}\,(-120º) = -\text{tg}\,(120º) = -\text{tg}\,(180 - 60) = \text{tg}\,60º = \sqrt{3}$

c) $\text{sen}\,225º = \text{sen}\,(180 + 45) = -\text{sen}\,45º = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 225º = \cos(180 + 45) = -\cos 45º = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\,225º = \text{tg}\,(180 + 45) = \text{tg}\,45º = 1$

d) $\text{sen}\,300º = \text{sen}\,(-60) = -\text{sen}\,60º = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 300º = \cos(-60º) = \cos 60º = \frac{1}{2}$

$\text{tg}\,300º = \text{tg}\,(-60) = -\text{tg}\,60º = -\sqrt{3}$

6.12 Con la ayuda de la calculadora, halla el seno, el coseno y la tangente de estos ángulos.

a) 275º **b) 124º 16′** **c) 1,5 rad** **d) $\frac{2\pi}{5}$ rad**

a) sen 275º $= -0{,}996$ cos 275º $= 0{,}087$ tg 275º $= -11{,}43$

b) sen 124º 16′ $= 0{,}826$ cos 124º 16′ $= -0{,}563$ tg 124º 16′ $= -1{,}468$

c) sen 1,5 rad $= -1$ cos 1,5 rad $= 0$ tg 1,5 rad $= \infty$

d) sen $\frac{2\pi}{5}$ rad $= 0{,}951$ cos $\frac{2\pi}{5}$ rad $= 0{,}309$ tg $\frac{2\pi}{5}$ rad $= 3{,}078$

6.13 Resuelve estas ecuaciones trigonométricas.

a) tg $x = -1$ **c) sen $x = 0$**

b) cos $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **d) cos $x = -0{,}7561$**

a) Segundo y cuarto cuadrante: $x = 360 - 45 = 315º$ ó $x = 180 - 45 = 135º$ $\begin{cases} x = 135º + 360º\,k \\ x = 315º + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Equivalentemente: $x = 135º + 180º\,k$ con $k \in \mathbf{Z}$

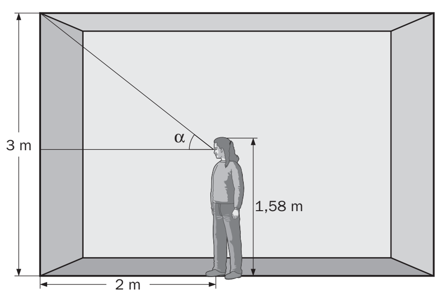
b) Primero y cuarto: $x = 45º$ ó $x = 360 - 45 = 315º$ $\begin{cases} x = 45º + 360º\,k \\ x = 315º + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

c) $x = 0$ ó $x = 180º$ $\begin{cases} x = 360º\,k \\ x = 180º + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$. Equivalentemente, $x + 180º\,k$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) Segundo y tercero: $x = 139{,}122º = 139º\ 7'\ 18''$ ó $x = 220{,}878º = 220º\ 52'\ 42''$ $\begin{cases} x = 139º\ 7'\ 18'' + 360º\,k \\ x = 220º\ 52'\ 42'' + 360º\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

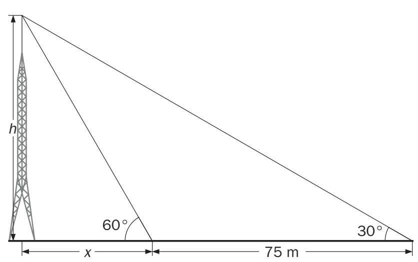
6.14 Inés mide 158 centímetros y la altura de su aula es de 3 metros.
Si se sitúa a 2 metros de la pared, ¿qué ángulo de elevación obtiene?



$3 - 1{,}58 = 1{,}42$ m

$\text{tg}\ \alpha = \frac{1{,}42}{2} = 0{,}71 \Rightarrow \alpha = 35º\ 22'\ 29''$

6.15 Desde el suelo se ve el punto más alto de una antena bajo un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 75 metros hacia su pie, este ángulo mide 60º. Halla la altura de la antena.



$$\begin{cases} \text{tg}\ 60º = \frac{h}{x} \\ \text{tg}\ 30º = \frac{h}{x + 75} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} = \frac{h}{x} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{x + 75} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = h \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}x}{x + 75} \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow x + 75 = 3x \Rightarrow x = \frac{75}{2} = 37{,}5 \\ h = 37{,}5\sqrt{3}\ \text{m} \end{matrix}$$

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Medida de ángulos

6.16 Expresa en radianes la medida de estos ángulos.

a) 30º

b) 240º

c) 90º

d) 270º

e) 135º

f) 300º

a) $\frac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{30^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 30}{360} = \frac{\pi}{6}$ rad

b) $\frac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{240^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 240}{360} = \frac{4\pi}{3}$ rad

c) $\frac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{90^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 90}{360} = \frac{\pi}{2}$ rad

d) $\frac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{270^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 270}{360} = \frac{3\pi}{2}$ rad

e) $\frac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{135^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 135}{360} = \frac{3\pi}{4}$ rad

f) $\frac{2\pi\text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{300^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 300}{360} = \frac{5\pi}{3}$ rad

6.17 Indica la medida en el sistema sexagesimal de los siguientes ángulos expresados en radianes.

a) 5π

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{7\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{8}$

e) $\frac{4\pi}{3}$

f) $\frac{7\pi}{11}$

a) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{5\pi\text{rad}} \Rightarrow x = \frac{1800 \cdot \pi}{2\pi} = 900^\circ$

b) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{5\pi}{6}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 5\pi}{12\pi} = 150^\circ$

c) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{4}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{8\pi} = 315^\circ$

d) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{\pi}{8}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot \pi}{16\pi} = 22{,}5^\circ = 22^\circ\ 30'$

e) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{4\pi}{3}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 4\pi}{6\pi} = 240^\circ$

f) $\frac{360^\circ}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{11}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{22\pi} = 114^\circ\ 32'\ 44''$

6.18 Halla el ángulo del intervalo [0º, 360º] que corresponde a:

a) 450º

b) 720º

c) 1300º

d) 1800º

e) 540º

f) 900º

a) $450^\circ = 360^\circ \cdot 1 + 90^\circ$. El ángulo es 90º.

b) $720^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 0^\circ$. El ángulo es 0º.

c) $1300^\circ = 360^\circ \cdot 3 + 220^\circ$. El ángulo es 220º.

d) $1800^\circ = 360^\circ \cdot 5 + 0^\circ$. El ángulo es 0º.

e) $540^\circ = 360^\circ \cdot 1 + 180^\circ$. El ángulo es 180º.

f) $900^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 180^\circ$. El ángulo es 180º.

6.19 Expresa en radianes el ángulo α, menor que 360º, al que equivalen estos ángulos.

a) 480º

b) 1235º

c) 930º

d) 1440º

a) $480° = 360° \cdot 1 + 120°$. El ángulo es 120º. $\quad \dfrac{2\pi \text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{120°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 120}{360} = \dfrac{2\pi}{3}$ rad

b) $1235° = 360° \cdot 3 + 155°$. El ángulo es 155º. $\quad \dfrac{2\pi \text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{155°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 155}{360} = \dfrac{31\pi}{36}$ rad

c) $930° = 360° \cdot 2 + 210°$. El ángulo es 210º. $\quad \dfrac{2\pi \text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{210°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 210}{360} = \dfrac{7\pi}{6}$ rad

d) $1440° = 360° \cdot 4 + 0°$. El ángulo es $0° = 0$ rad.

6.20 Calcula el ángulo equivalente en sentido positivo a cada uno de los siguientes. Utiliza en cada caso la misma unidad de medida en que vienen dados.

a) $-330°$

b) $-\dfrac{3\pi}{4}$ rad

c) $-120°$

d) $-\dfrac{\pi}{2}$ rad

a) $360° - 330° = 30°$

b) $2\pi - \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$ rad

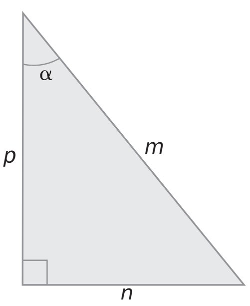
c) $360° - 120° = 240°$

d) $2\pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$ rad

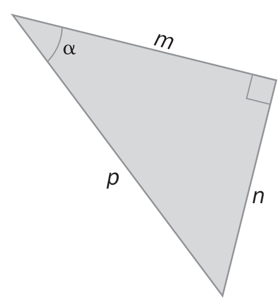
Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

6.21 Escribe, en función de *m*, *n* y *p*, el seno, el coseno y la tangente del ángulo α en estos triángulos rectángulos.

a)



b)



a) $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{n}{m}$; $\cos \alpha = \dfrac{p}{m}$; $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{n}{p}$

b) $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{n}{p}$; $\cos \alpha = \dfrac{m}{p}$; $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{n}{m}$

6.22 La hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo miden 10, 8 y 6 decímetros, respectivamente. ¿Cuáles son las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud del triángulo?

El ángulo agudo más pequeño es el opuesto al cateto más pequeño.

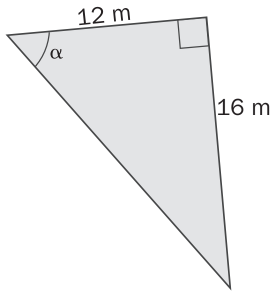
$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

$\cos \alpha = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

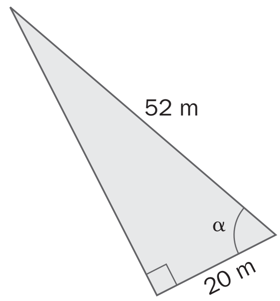
$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

6.23 Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada triángulo rectángulo.

a)



b)



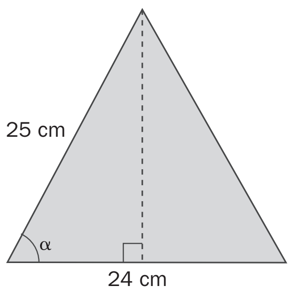
a) Si a es la hipotenusa, $a = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$

$\text{sen } \alpha = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$; $\cos \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$; $\text{tg } \alpha = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

b) Si b es el cateto opuesto, $b = \sqrt{52^2 - 20^2} = 48$

$\text{sen } \beta = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$; $\cos \beta = \frac{20}{52} = \frac{5}{13}$; $\text{tg } \beta = \frac{48}{20} = \frac{12}{5}$

6.24 Calcula las razones trigonométricas del ángulo α.



$h = \sqrt{25^2 - 12^2} = 21{,}93$ cm

$\text{sen } \alpha = \frac{21{,}93}{25} = 0{,}8772$; $\cos \alpha = \frac{12}{25} = 0{,}48$

$\text{tg } \alpha = \frac{21{,}93}{12} = 1{,}8295$

6.25 Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo α si sen $\alpha = 0{,}6$.

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 0{,}6^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 0{,}36 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

6.26 Halla el seno y la tangente de un ángulo agudo α cuyo coseno vale $\frac{4}{5}$.

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

6.27 Calcula el seno y el coseno de un ángulo agudo α si su tangente es igual a $\sqrt{5}$.

$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{6}{36} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{\frac{30}{36}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

6.28 Halla la medida en el sistema sexagesimal de los ángulos del primer cuadrante que cumplen cada una de las siguientes condiciones.

a) $\text{sen } \alpha = \frac{1}{5}$

b) $\text{tg } \beta = 4$

c) $\cos \gamma = \frac{5}{9}$

d) $\text{sen } \delta = 0{,}4$

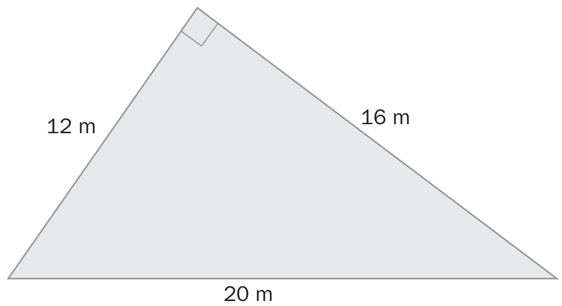
a) $\alpha = 11° \ 32' \ 13''$

b) $\beta = 75° \ 57' \ 49''$

c) $\gamma = 56° \ 15' \ 4''$

d) $\delta = 23° \ 34' \ 41''$

6.29 Calcula la medida de los ángulos del triángulo.



Comprobamos que el triángulo es rectángulo:

$12^2 + 16^2 = 20^2$

$\text{sen } \alpha = \frac{12}{20} \Rightarrow \alpha = 36° \ 52' \ 12''$

$\beta = 90° - 36° \ 52' \ 12'' = 53° \ 7' \ 48''$

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

6.30 Sin calcular su valor, indica el signo que tienen las siguientes razones trigonométricas.

a) $\cos 315°$

b) $\text{sen } 150°$

c) $\text{tg } 190°$

d) $\text{sen } 850°$

e) $\text{tg } 118°$

f) $\cos 230°$

g) $\text{sen } 340°$

h) $\cos 460°$

a) $\cos 315° > 0$

b) $\text{sen } 150° > 0$

c) $\text{tg } 190° > 0$

d) $\text{sen } 850° > 0$

e) $\text{tg } 118° < 0$

f) $\cos 230° < 0$

g) $\text{sen } 340° < 0$

h) $\cos 460° < 0$

6.31 ¿En qué cuadrantes se pueden encontrar cada uno de los siguientes ángulos?

a) α, si $\text{sen } \alpha > 0$

b) β, si $\text{tg } \beta > 0$

c) χ, si $\cos \chi < 0$

d) δ, si $\text{sen } \delta < 0$

a) En el primero y en el segundo

b) En el primero y en el tercero

c) En el segundo y en el tercero

d) En el tercero y en el cuarto

6.32 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 135° y 225° a partir de las del ángulo de 45°.

$\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } 135° = -\text{tg } 45° = -1$

$\text{sen } 225° = -\text{sen } 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 225° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } 225° = \text{tg } 45° = 1$

6.33 Halla las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.

a) Si $\cos\alpha = \frac{6}{7}$ y $270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$

b) Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{8}$ y $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$

c) Si $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ y $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$

a) $\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{36}{49} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{\frac{13}{49}} = -\frac{\sqrt{13}}{7}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{13}}{7}}{\frac{6}{7}} = -\frac{\sqrt{13}}{6}$$

b) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{64} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{55}{64}} = -\frac{\sqrt{55}}{8}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{8}}{-\frac{\sqrt{55}}{8}} = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$$

c) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

6.34 Calcula las razones trigonométricas del ángulo α, expresado en radianes, en cada caso.

a) Si $\operatorname{tg}\alpha = 5$ y $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

b) Si $\cos\alpha = 0{,}8$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$

a) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + 5^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{26} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 5\frac{\sqrt{26}}{26} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

b) $0{,}8^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 0{,}36 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -0{,}6 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-0{,}6}{0{,}8} = -\frac{3}{4}$

6.35 Si α es un ángulo agudo y $\cos\alpha = \frac{5}{9}$, ¿cuáles son las razones trigonométricas del ángulo $\alpha + 180^\circ$?

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{25}{81} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{56}{81}} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{14}}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{2\sqrt{14}}{5}$$

$\operatorname{sen}(\alpha + 180) = -\frac{2\sqrt{14}}{9}$, $\cos(\alpha + 180) = -\frac{5}{9}$, $\operatorname{tg}(\alpha + 180) = \frac{2\sqrt{14}}{5}$

6.36 El coseno de un ángulo del primer cuadrante vale $\frac{12}{13}$. Calcula:

a) sen (α + 180°)

b) tg (90° − α)

c) cos (180° − α)

d) sen (−α)

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \text{sen}^2\,\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

a) $\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha = -\frac{5}{13}$

b) $\text{tg}\,(90° - \alpha) = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{12}{5}$

c) $\cos\,(180° - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

d) $\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha = -\frac{5}{13}$

6.37 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en grados.

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $1 - 2\cos x = 0$

c) $\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{tg}\,x = 1$

a) $x = \arccos -\frac{\sqrt{3}}{2} = 150°$ ó $x = 210°$ $\begin{cases} x = 150° + 360°\,k \\ x = 210° + 360°\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60°$ ó $x = 300°$ $\begin{cases} x = 60° + 360°\,k \\ x = 300° + 360°\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

c) $x = 240°$ ó $x = 300° \Rightarrow \begin{cases} x = 240° + 360°\,k \\ x = 300° + 360°\,k \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) $x = 45°$ ó $x = 225° \Rightarrow x = 45° + 180°\,k$ con $k \in \mathbf{Z}$

6.38 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. Expresa los resultados en radianes.

a) $\text{tg}\,x = -2$

b) $2 - 5\cos x = 6$

c) $\text{sen}\,x = 0{,}81$

d) $4\,\text{sen}\,x + 1 = 0$

a) $\text{arctg}\,(-2) = -0{,}35\pi \Rightarrow x = -0{,}35\pi + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $\cos x = -\frac{4}{5} \Rightarrow x = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = 0{,}8\pi$ ó $x = 1{,}2\,\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}8\pi + 2k\pi \\ x = 1{,}2\pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

c) $x = \text{arcsen}\,0{,}81 = 0{,}3\pi$ ó $x = 0{,}7\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}3\pi + 2k\pi \\ x = 0{,}7\pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) $\text{sen}\,x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{4}\right) = 1{,}92\pi$ ó $x = 1{,}08\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}08\pi + 2k\pi \\ x = 1{,}92\pi + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbf{Z}$

6.39 Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas.

a) $\text{tg}^2\,\alpha \cdot (1 - \text{sen}^2\,\alpha) = \text{sen}^2\,\alpha$

b) $\frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{\text{tg}\,\alpha} = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$

c) $(1 + \text{tg}^2\,\alpha) \cdot \cos^2\alpha = 1$

a) $\text{tg}^2\,\alpha \cdot (1 - \text{sen}^2\,\alpha) = \text{tg}^2\,\alpha \cdot \cos^2\alpha = \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha = \text{sen}^2\,\alpha$

b) $\frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$

c) $(1 + \text{tg}^2\,\alpha) \cdot \cos^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha = 1$

6.40 Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) El coseno de un ángulo agudo es positivo.

b) La tangente de un ángulo del segundo o del tercer cuadrante es negativa.

c) El seno de un ángulo es positivo si está comprendido entre 0º y 180º.

d) Hay dos ángulos entre 0 y 2π radianes con el mismo valor de la tangente.

a) Verdadera.

b) Falsa. En el tercero, el seno y el coseno son negativos, y, por tanto, la tangente es positiva.

c) Verdadera.

d) Verdadera.

6.41 Comprueba si existe un ángulo α tal que sen $\alpha = \frac{1}{4}$ y cos $\alpha = \frac{3}{4}$.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1+9}{16} \neq 1$ No puede existir.

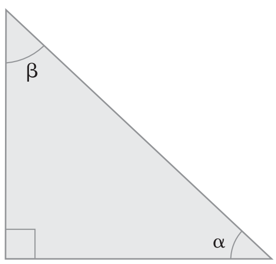
6.42 Los lados de un triángulo miden 45, 27 y 36 centímetros. Demuestra que el seno de uno de sus ángulos vale $\frac{3}{5}$.

¿Cuáles son las otras dos razones trigonométricas de ese ángulo?

Primero hay que comprobar que es rectángulo: $45^2 = 27^2 + 36^2 \Rightarrow 2025 = 729 + 1296$.

$\text{sen}\,\alpha = \frac{27}{45} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{36}{45} = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

6.43 Si sen α = 0,68 y cos α = 0,73, calcula sen β y cos β.



$\cos\beta = \text{sen}\,\alpha = 0{,}68$

$\text{sen}\,\beta = \cos\alpha = 0{,}73$

6.44 Escribe en radianes el cuadrante en el que se encuentra un ángulo α si:

a) sen α = 0,35

b) tg α = −1,5

c) cos α = −0,9

a) $0 \leq \alpha \leq \pi$

b) $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ y $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$

c) $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$

6.45 ¿Qué relación existe entre las tangentes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?

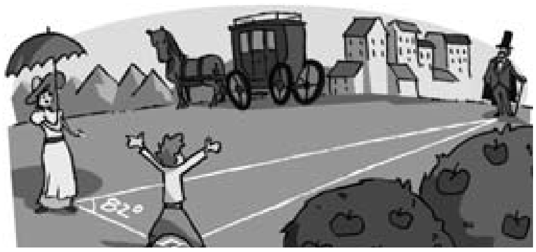
$\text{tg}\,\beta = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

6.46 En el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60º con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 metros.

¿Cuánto mide el árbol?

Si h es la altura del árbol, $\text{tg } 60° = \dfrac{h}{2{,}6} \Rightarrow h = 2{,}6 \cdot \text{tg } 60° = 4{,}5$ m

6.47 Para medir la distancia entre dos puntos muy alejados *A* y *B*, se han situado dos personas sobre ellos. Una tercera persona está en un punto *C*, a 50 metros de distancia de *A*.



Calcula la distancia que separa los puntos *A* y *B*.

Si a es la distancia que separa los puntos A y B: $\text{tg } 82° = \dfrac{a}{50} \Rightarrow a = 50 \cdot \text{tg } 82° = 355{,}77$ m.

6.48 Unas cigüeñas han construido su nido sobre el tejado de un edificio a 25 metros del suelo. Un chico lo observa desde un punto situado a 50 metros del edificio.

Calcula el ángulo de observación.

$$\text{tg } \alpha = \frac{25}{50} \Rightarrow \alpha = \text{arctg } \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$$

6.49 Juan ha subido en un globo aerostático hasta una altura de 50 metros. Sus padres siguen el vuelo desde el suelo.

a) ¿A qué distancia del punto A se encuentran los padres de Juan?

b) Si el globo continúa subiendo en la misma dirección y se detiene cuando el ángulo de observación de Juan es de 60º, ¿a cuántos metros de altura se encuentra el globo en este momento?

a) Si a es la distancia: $\text{tg } 75° = \dfrac{a}{50} \Rightarrow a = 50 \cdot \text{tg } 75° = 186{,}60$ m.

b) Si h es la distancia al suelo: $\text{tg } 60° = \dfrac{180{,}60}{h} \Rightarrow h = \dfrac{180{,}6}{\text{tg } 60°} = 107{,}74$ m.

6.50 El tronco de una palmera mide 3,5 metros y crece de forma inclinada debido al peso de la parte superior. La perpendicular desde su parte más alta hasta la tierra mide 2 metros.

Calcula el ángulo de inclinación del tronco respecto a la vertical.

$\cos \alpha = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7} \Rightarrow \alpha = \text{arcos } \dfrac{4}{7} \Rightarrow \alpha = 55{,}15°$

6.51 Alba va a poner una bombilla de bajo consumo en una lámpara que está situada a 2 metros del suelo.

Alba mide 1,53 metros, y cada lado de la escalera, 70 centímetros. Averigua si alcanza con ella para poner la bombilla.

Al abrir la escalera, sus lados forman con el suelo un triángulo isósceles. La altura del triángulo es la altura a la que estará el último peldaño una vez abierta.

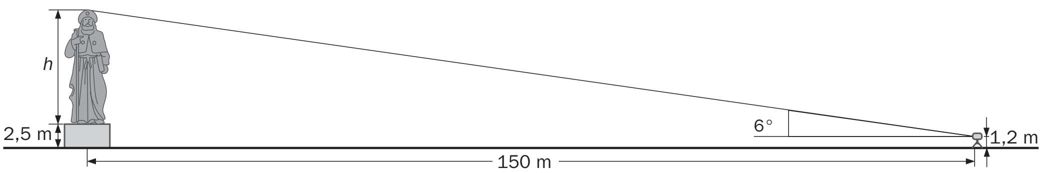
$$\text{sen } 50° = \frac{h}{70} \Rightarrow h = 70 \cdot \text{sen } 50° = 53{,}62 \text{ cm.}$$

La altura a la que llegará la cabeza de Alba es: $53{,}62 + 153 = 206{,}62$ cm.

Por tanto, llegará para cambiar la bombilla sin esfuerzo.

6.52 En el centro de una plaza de forma circular de 300 metros de diámetro hay una estatua sobre un pedestal que mide 2,5 metros de altura.

Con un teodolito situado en el borde de la plaza se observa la parte más alta de la estatua bajo un ángulo de 6°. Si la mira del teodolito se encuentra a 1,2 metros sobre el suelo, ¿cuánto mide la estatua?



El radio de la plaza es de 150 m. Si h es la altura de la estatua: $\text{tg } 6° = \dfrac{h + 2{,}5 - 1{,}2}{150} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h + 1{,}3 = 150 \cdot \text{tg } 6° = 15{,}77 \text{ m} \Rightarrow h = 15{,}77 - 1{,}3 = 14{,}47 \text{ m}$$

6.53 Desde un lugar situado junto al pie de una montaña se observa el pico más alto de la misma con un ángulo de elevación de 45º. Si se retrocede 1061 metros, el ángulo es de 30º.

Calcula la altura de la montaña.

Si h es la altura, y x, la distancia de la base de esta al primer punto de observación:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 45° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30° = \dfrac{h}{x + 1061} \end{array}\right\} x = h$$

$$\text{tg } 30° = \frac{h}{x + 1061} \Rightarrow \text{tg } 30° \cdot h + 1061 \cdot \text{tg } 30° = h \Rightarrow h = \frac{1061 \cdot \text{tg } 30°}{1 - \text{tg } 30°} = 1449{,}35 \text{ m}$$

6.54 Una antena se ha clavado en el suelo. Para que permanezca vertical y bien sujeta se han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados de la antena alineados con su base.

La distancia entre los anclajes es de 40 metros y, si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30º y 60º, respectivamente.

Calcula la altura de la antena.

Si h es la altura, y x, la distancia de la base de esta al punto en el que el ángulo de observación es de 60º:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 60° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30° = \dfrac{h}{40 - x} \end{array}\right\} h = x \cdot \text{tg } 60°$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\text{tg } 60° \cdot x}{40 - x} \Rightarrow 40 \cdot \text{tg } 30° - \text{tg } 30° \cdot x = \text{tg } 60° \cdot x \Rightarrow x = \frac{40 \cdot \text{tg } 30°}{\text{tg } 60° + \text{tg } 30°} = 10 \text{ m}, h = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

R E F U E R Z O

Medida de ángulos

6.55 Calcula la medida en radianes de estos ángulos.

a) 36º

b) 20º

c) 216º

d) 160º

e) 324º

f) 290º

a) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{36°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 36}{360} = \dfrac{\pi}{5}$ rad

b) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{20°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 20}{360} = \dfrac{\pi}{9}$ rad

c) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{216°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 216}{360} = \dfrac{6\pi}{5}$ rad

d) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{160°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 160}{360} = \dfrac{8\pi}{9}$ rad

e) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{324°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 324}{360} = \dfrac{9\pi}{5}$ rad

f) $\dfrac{2\pi\text{rad}}{360°} = \dfrac{x}{290°} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi \cdot 290}{360} = \dfrac{29\pi}{18}$ rad

6.56 Expresa en grados:

a) 4π **rad**

b) $\frac{9\pi}{4}$ **rad**

c) $\frac{7\pi}{9}$ **rad**

d) $\frac{13\pi}{6}$ **rad**

e) $\frac{5\pi}{12}$ **rad**

f) $\frac{11\pi}{5}$ **rad**

a) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{4\pi\text{rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 4\pi}{2\pi} = 720°$

b) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{9\pi}{4}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 9\pi}{8\pi} = 405°$

c) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{7\pi}{9}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 7\pi}{18\pi} = 140°$

d) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{13\pi}{6}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 13\pi}{12\pi} = 390°$

e) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{5\pi}{12}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 5\pi}{24\pi} = 75°$

f) $\frac{360°}{2\pi\text{rad}} = \frac{x}{\frac{11\pi}{5}\text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 11\pi}{10\pi} = 396°$

6.57 ¿A qué ángulo menor que 360° equivalen los siguientes?

a) 720°
b) 1050°
c) 990°
d) 840°
e) 600°
f) 1260°

a) 720° = 360° · 2 + 0°. El ángulo es 0°.

b) 1050° = 360° · 2 + 330° . El ángulo es 330°.

c) 990° = 360° · 2 + 270°. El ángulo es 270°.

d) 840° = 360° · 2 + 120°. El ángulo es 120°.

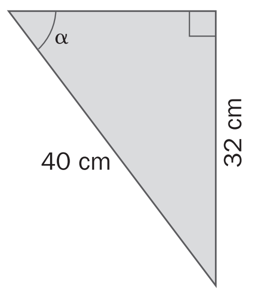
e) 600° = 360° · 1 + 240°. El ángulo es 240°.

f) 1260° = 360° · 3 + 180°. El ángulo es 180°.

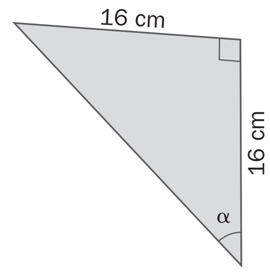
Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

6.58 Halla las razones trigonométricas del ángulo α en estos triángulos rectángulos.

a)



b)



a) Si b es el cateto que falta: $b = \sqrt{40^2 - 32^2} = 24$.

$\text{sen } \alpha = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$; $\cos \alpha = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$; $\text{tg } \alpha = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$

b) Si a es la hipotenusa: $a = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$.

$\text{sen } \alpha = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \alpha = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } \alpha = \frac{16}{16} = 1$

6.59 Calcula la tangente del ángulo agudo α en cada caso.

a) Si $\cos \alpha = 0{,}2$

b) Si $\text{sen } \alpha = \frac{5}{8}$

a) $1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{0{,}2^2} = 25 \Rightarrow \text{tg } \alpha = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

b) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{64} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{39}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{\sqrt{39}}{8}} = \frac{5\sqrt{39}}{39}$$

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

6.60 **Si cos 70° = 0,34, halla:**

a) sen 20°

b) cos 110°

c) cos 250°

d) cos 290°

a) sen 20° = sen (90° − 70°) = cos 70° = 0,34

b) cos 110° = cos (180° − 70°) = −cos 70° = −0,34

c) cos 250° = cos (180° + 70°) = −cos 70° = −0,34

d) cos 290° = cos (−70°) = cos 70° = 0,34

6.61 **Si α es un ángulo agudo y sen α = 0,64, calcula:**

a) sen (180° − α)

b) cos (90° − α)

c) sen (−α)

d) sen (α + 180°)

a) sen (180° − α) = sen α = 0,64

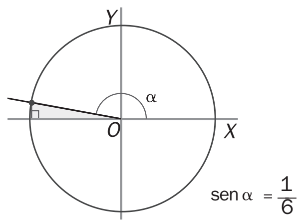
b) cos (90° − α) = sen α = 0,64

c) sen (−α) = −sen α = −0,64

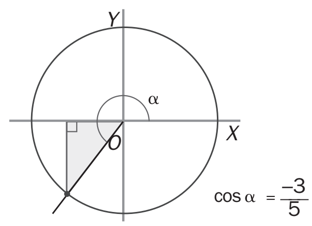
d) sen (α + 180°) = −sen α = −0,64

6.62 **Halla el valor de los ángulos.**

a)



b)



a) $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{6}$ en el segundo cuadrante $\Rightarrow \alpha = 170{,}41°$

b) $\cos \alpha = \frac{-3}{5}$ en el tercer cuadrante $\Rightarrow \alpha = 233{,}13°$

6.63 **Calcula las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada caso.**

a) Si $\cos \alpha = -\frac{4}{7}$ y $180° \leq \alpha \leq 270°$

b) Si $\text{sen}\ \alpha = -\frac{9}{10}$ y $270° \leq \alpha \leq 360°$

c) Si $\text{tg}\ \alpha = -\sqrt{8}$ y $90° \leq \alpha \leq 180°$

a) $\left(-\frac{4}{7}\right)^2 + \text{sen}^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 1 - \frac{16}{49} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -\sqrt{\frac{33}{49}} = -\frac{\sqrt{33}}{7}$ $\quad \text{tg}\ \alpha = \dfrac{-\frac{\sqrt{33}}{7}}{-\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{33}}{4}$

b) $\left(-\frac{9}{10}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{81}{100} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{19}{100}} = \frac{\sqrt{19}}{10}$ $\quad \text{tg}\ \alpha = \dfrac{-\frac{9}{10}}{\frac{\sqrt{19}}{10}} = -\frac{9\sqrt{19}}{19}$

c) $1 + \left(-\sqrt{8}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{3}; -\sqrt{8} = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -\sqrt{8}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

6.64 Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos reduciéndolos primero a uno equivalente menor que 360º.

a) 450º

b) 2190º

c) 1125º

d) 630º

a) $450º = 360º + 90º$

$\text{sen } 450º = \text{sen } 90º = 1$, $\cos 450º = \cos 90º = 0$, $\text{tg } 450º = \text{tg } 90º = \infty$

b) $2190º = 360º \cdot 6 + 30º$

$\text{sen } 2190º = \text{sen } 30º = \frac{1}{2}$, $\cos 2190º = \cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg } 2190º = \text{tg } 30º = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $1125º = 360º \cdot 3 + 45º$

$\text{sen } 1125º = \text{sen } 45º = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 1125º = \cos 45º = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{tg } 1125º = \text{tg } 45º = 1$

d) $630º = 360º + 270º$

$\text{sen } 630º = \text{sen } 270º = -1$, $\cos 630º = \cos 270º = 0$, $\text{tg } 630º = \text{tg } 270º = \infty$

6.65 El seno de un ángulo agudo α vale $\frac{7}{9}$. Calcula:

a) $\cos(\alpha + 90º)$

b) $\text{sen}(\alpha + 270º)$

c) $\text{tg}(540º - \alpha)$

d) $\text{tg}(\alpha + 1440º)$

$$\left(\frac{7}{9}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{49}{81} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{4\sqrt{2}}{9}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

a) $\cos(\alpha + 90º) = -\text{sen}\,\alpha = -\frac{7}{9}$

b) $\text{sen}(\alpha + 270) = -\cos\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

c) $\text{tg}(540º - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$

d) $\text{tg}(\alpha + 1440) = \text{tg}\,\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{8}$

6.66 Si $\cos\alpha = \frac{10}{11}$ y $\frac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$, calcula las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) $\alpha + \pi$

b) $2\pi - \alpha$

c) $\pi - \alpha$

d) $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{10}{11}\right)^2 + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{100}{121} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\sqrt{\frac{21}{121}} = -\frac{\sqrt{21}}{11}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{11}}{\frac{10}{11}} = -\frac{\sqrt{21}}{10}$$

a) $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{21}}{11}$; $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{10}{11}$; $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{10}$

b) $\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{21}}{11}$; $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha = \frac{10}{11}$; $\text{tg}(2\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{21}}{10}$

c) $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{11}$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{10}{11}$; $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{21}}{10}$

d) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{10}{11}$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{11}$; $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = -\frac{10\sqrt{21}}{21}$

6.67 Si tg $\alpha = -\sqrt{15}$ y $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$, halla las razones trigonométricas de los ángulos suplementario y opuesto a α.

$$1 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{16} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{4};\ -\sqrt{15} = \frac{\text{sen } \alpha}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4};\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{1}{4};\ \text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha = \sqrt{15}$$

$$\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4};\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha = -\frac{1}{4};\ \text{tg } (-\alpha) = -\text{tg } \alpha = \sqrt{15}$$

6.68 Demuestra estas igualdades trigonométricas.

a) $\dfrac{\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$

b) $\cos \alpha + \dfrac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{1}{\cos \alpha}$

a) $\dfrac{\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \dfrac{(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$

b) $\cos \alpha + \dfrac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{1}{\cos \alpha}$

6.69 Resuelve estas ecuaciones.

a) $|\text{sen}\, x| = 1$

b) $|\cos x| = \frac{1}{2}$

c) $|\text{tg}\, x| = 1$

d) $|\text{sen}\, x| = \frac{1}{2}$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ó $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

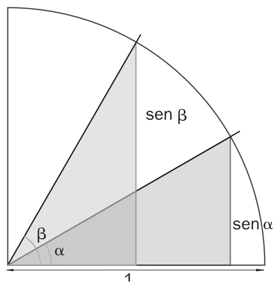
c) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ó $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$; $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ó $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$; $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

6.70 **¿Cantidades proporcionales?**

En la figura aparece dibujado el primer cuadrante de la circunferencia goniométrica.

En ella se consideran dos ángulos α y β tales que la amplitud del segundo es igual a la del primero aumentada en un 50%.



a) Halla el valor del seno de cada uno de los ángulos si $\alpha = 30°$. Determina en qué porcentaje ha aumentado el seno de β en relación con el de α.

b) ¿En qué porcentaje aumenta el seno de β si el ángulo α mide 60°?

c) ¿Crees que los senos de los ángulos son proporcionales a las amplitudes de los mismos?

a) $\text{sen } \alpha = \text{sen } 30° = 0{,}5 \qquad \text{sen } \beta = \text{sen } (1{,}5 \cdot 30) = \text{sen } 45° = 0{,}707$

$\dfrac{0{,}707}{0{,}5} = 1{,}414 \Rightarrow$ Mientras que la amplitud crece en un 50%, el valor del seno aumenta en un 41,4%.

b) $\text{sen } \alpha = \text{sen } 60° = 0{,}866 \qquad \text{sen } \beta = \text{sen } (1{,}5 \cdot 60) = \text{sen } 90° = 1$

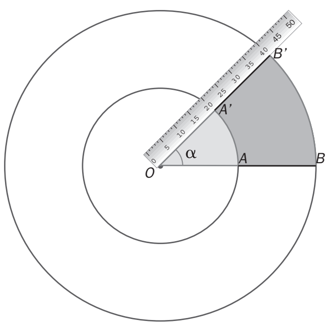
$\dfrac{1}{0{,}866} = 1{,}155 \Rightarrow$ El valor del seno ha aumentado en solo un 15,5%.

c) Al pasar de 30° a 45°, la amplitud ha aumentado en un 50%, y el seno, en un 41,4%. Al pasar de 60° a 90°, la amplitud ha aumentado en un 50%, pero el seno sólo lo ha hecho en un 15,5%. Las amplitudes no son, pues, proporcionales a los senos.

6.71 **Colores circulares**

La regla de la figura gira en el sentido contrario a las agujas del reloj y describe una vuelta completa en 2 minutos.

La longitud de los segmentos *OA* y *AB* es de 20 centímetros.



a) Calcula, en radianes, el ángulo α descrito en un segundo.

b) Halla, en centímetros cuadrados, las áreas de color gris y de color naranja que se han pintado cuando ha pasado un segundo.

c) Calcula la relación de las áreas pintadas cuando ha transcurrido un segundo. ¿Cuál es esa relación al cabo de 40 segundos?

a) En 120 segundos describe 2π radianes. En un segundo describe $\dfrac{2\pi}{120} = \dfrac{\pi}{60}$ radianes.

b) Área del sector *OBB'* cuando ha pasado 1 segundo: $\dfrac{\pi \cdot OB^2}{120} = \dfrac{\pi \cdot 1600}{120} = \dfrac{40\pi}{3}$ cm^2.

Área del sector *OAA'* cuando ha pasado 1 segundo: $\dfrac{\pi \cdot OA^2}{120} = \dfrac{\pi \cdot 400}{120} = \dfrac{10\pi}{3}$ cm^2.

Área de la zona gris: $\dfrac{10\pi}{3}$ cm^2 Área de la zona naranja: $\dfrac{(40 - 10)\pi}{3} = 10\pi$ cm^2

c) La relación de las áreas pintadas cuando han pasado 1 y 40 segundos es la misma:

$$\frac{\text{Zona Gris}}{\text{Zona Naranja}} = \frac{\frac{10\pi}{3}}{10\pi} = \frac{1}{3}$$

6.A1 Expresa en grados la medida de estos ángulos.

a) $\frac{3\pi}{5}$ **rad** **b)** $\frac{15\pi}{4}$ **rad** **c)** 9π **rad**

a) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{\frac{3\pi}{5} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 3\pi}{10\pi} = 108^\circ$

b) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{\frac{15\pi}{4} \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 15\pi}{8\pi} = 675^\circ$

c) $\frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} = \frac{x}{9\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 9\pi}{2\pi} = 1620^\circ$

6.A2 Pasa a radianes las medidas de los siguientes ángulos.

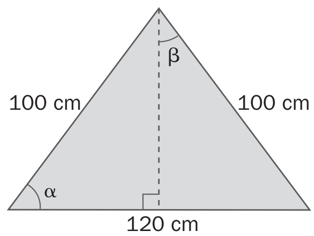
a) 36º **b) 100º** **c) 310º**

a) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{36^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 36}{360} = \frac{\pi}{5}$ rad

b) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{100^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 100}{360} = \frac{5\pi}{9}$ rad

c) $\frac{2\pi \text{rad}}{360^\circ} = \frac{x}{310^\circ} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 310}{360} = \frac{31\pi}{18}$ rad

6.A3 Halla las razones trigonométricas de los ángulos α y β.

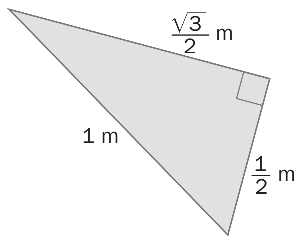


$h^2 = 100^2 - 60^2 = 6400 \Rightarrow h = 80$ cm

$\text{sen } \alpha = \frac{80}{100} = 0{,}8$ $\cos \alpha = \frac{60}{100} = 0{,}6$ $\text{tg } \alpha = \frac{80}{60} = 1{,}33$

$\text{sen } \beta = \frac{60}{100} = 0{,}6$ $\cos \beta = \frac{80}{100} = 0{,}8$ $\text{tg } \beta = \frac{60}{80} = 0{,}75$

6.A4 Calcula la medida de los ángulos agudos del triángulo.



$\text{sen } \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ $\text{sen } \beta = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$

6.A5 Halla las otras dos razones trigonométricas en cada caso.

a) Si sen $\alpha = \frac{3}{10}$ y $90^\circ \le \alpha \le 180^\circ$

b) Si tg $\alpha = \sqrt{24}$ y $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

c) Si cos $\alpha = \frac{1}{8}$ y $270^\circ \le \alpha \le 360^\circ$

d) Si tg $\alpha = \frac{4}{3}$ y $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$

a) $\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{100} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{91}{100}} = -\frac{\sqrt{91}}{10}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{3}{10}}{-\frac{\sqrt{91}}{10}} = -\frac{3\sqrt{91}}{91}$

b) $1 + \left(\sqrt{24}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{5}$; $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{24}\cdot\frac{1}{5} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

c) $\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{64} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\sqrt{\frac{63}{64}} = -\frac{\sqrt{63}}{8}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{63}}{8}}{\frac{1}{8}} = -\sqrt{63} = -3\sqrt{7}$

d) $1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5}$; $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$

6.A6 Si el seno de un ángulo agudo α vale $\frac{1}{5}$, calcula:

a) sen $(180^\circ - \alpha)$ **b) cos $(-\alpha)$** **c) cos $(90^\circ - \alpha)$** **d) sen $(\alpha + 180^\circ)$**

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

a) $\text{sen}\,(180^\circ - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{5}$

b) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

c) $\cos(90^\circ - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{5}$

d) $\text{sen}\,(\alpha + 180^\circ) = -\text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{5}$

6.A7 Calcula los ángulos que cumplen cada una de las siguientes condiciones.

a) cos $\alpha = -0{,}44$ **b) tg $\beta = \sqrt{43}$** **c) sen $\chi = \frac{8}{15}$** **d) sen $\delta = -0{,}96$**

a) $\alpha = 116^\circ\ 6'\ 14'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\alpha = 243^\circ\ 53'\ 46'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

b) $\beta = 81^\circ\ 19'\ 45'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\beta = 261^\circ\ 19'\ 45'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

c) $\chi = 32^\circ\ 13'\ 51'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\chi = 147^\circ\ 46'\ 8'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

d) $\delta = 253^\circ\ 44'\ 23'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ y $\delta = 286^\circ\ 15'\ 37'' + 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

El recorrido del oso

Un oso camina 10 kilómetros hacia el sur; luego gira al este y camina 8, gira hacia el norte y, andando otros 10 kilómetros llega al punto de partida. ¿Cómo es posible? ¿Cuál es la figura que muestra el recorrido del oso? ¿Cuánto miden sus ángulos?

Para que el recorrido sea posible, el oso debe ser blanco y estar en el polo norte.

El oso recorre el perímetro de un triángulo isósceles curvo.

Dos de sus ángulos internos son de 90º, el otro es:

$$\alpha = \frac{8}{2\pi \cdot 6370} \cdot 360^\circ = 0{,}072^\circ$$

donde 6370 es el radio de la Tierra en kilómetros.