MATEMATICAS. 4ºESO-B. TEMA 6y7: Semejanza y Trigonometría

1.- Sabiendo que cosec α = 3, calcular las restantes razones trigonométricas.

2.- Calcula las razones de los siguientes ángulos: a) -150º b) 1740º

3.- Simplificar las fracciones:

a) $\dfrac{1+tg^2x}{1+cotg^2x}$ b) $\dfrac{sec^2 a-\cos^2 a}{tg^2 a}$ c) $\dfrac{cosec^2 a - sen^2 a}{cosec^2 a\cdot(2-\cos^2 a)}$

4.- Calcular la longitud del lado y de la apotema de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 49 centímetros de radio.

5.- Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras. La distancia de A a C es 6 km y la de B a C 9 km. El ángulo que forman estas carreteras es 120°. ¿Cuánto distan A y B?

6.- Expresa en grados los siguientes ángulos: a) 3 rad b) 22п/5rad c) 33п/10 rad.

7.- Expresa en radianes los siguientes ángulos: a) 316° b) 10° c) 127º

8.- Sabiendo que cos α = ¼ , y que 270º <α <360°. Calcular las restantes razones trigonométricas.

9.- Sabiendo que tg α = 2, y que 180º < α <270°. Calcular las restantes razones trigonométricas.

10.- Calcula las razones de los ángulos: a) 225° b) 330° c) 2.655° d) −840º

11.- Comprobar las identidades:

a) $tg\,\alpha + cotg\,\alpha = sec\,\alpha\cdot cosec\,\alpha$ b) $cotg^2 a = \cos^2 a + (cotg\,a\cdot\cos a)^2$

c) $\dfrac{1}{sec^2 a} = sen^2 a\cdot\cos^2 a + \cos^4 a$ d) $cotg\,a\cdot sec\,a = cosec\,a$

12.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 5 m y B = 41.7°. Resolver el triángulo.

13.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 6 m y b = 4 m. Resolver el triángulo.

14.- Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.

15.- Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla?

16.- Hallar el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24.6 m tiene como arco correspondiente uno de 70°.

17.- Calcular el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.

18.- Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60°.

19.- La longitud del lado de un octógono regular es 12 m. Hallar los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita.

20.- De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y c = 5 m. Resolver el triángulo.

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

1er cuadrante

$\text{sen } \alpha = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\text{cosec } \alpha = 3$

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad$ $\sec \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\text{tg } \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\quad$ $\text{cotg } \alpha = 2\sqrt{2}$

2º cuadrante

$\text{sen } \alpha = \frac{1}{3}$ $\quad$ $\text{cosec } \alpha = 3$

$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad$ $\sec \alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\text{tg } \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\quad$ $\text{cotg } \alpha = -2\sqrt{2}$

Ejercicio nº 2.

1.- $$sen\,(-150^\circ) = -sen\,150^\circ = -sen\,(180^\circ - 30^\circ) = -sen\,30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-150^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\,(-150^\circ) = -tg\,150^\circ = -tg\,(180^\circ - 30^\circ) = -(-tg\,30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2.- $$\begin{array}{l|l} 1740^\circ & 360^\circ \\ \hline 300^\circ & 4 \end{array}$$

$$sen\,1740^\circ = sen\,300^\circ = sen\,(360^\circ - 60^\circ) = -sen\,60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1740^\circ = \cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\ ;\ tg\,1740^\circ = -\sqrt{3}$$

Ejercicio nº 3.-

1.- $\dfrac{1+tg^2x}{1+cotg^2x}$ $\qquad \dfrac{1+tg^2x}{1+cotg^2x}=\dfrac{\sec^2x}{cosec^2x}=\dfrac{\frac{1}{\cos^2x}}{\frac{1}{sen^2x}}=tg^2x$

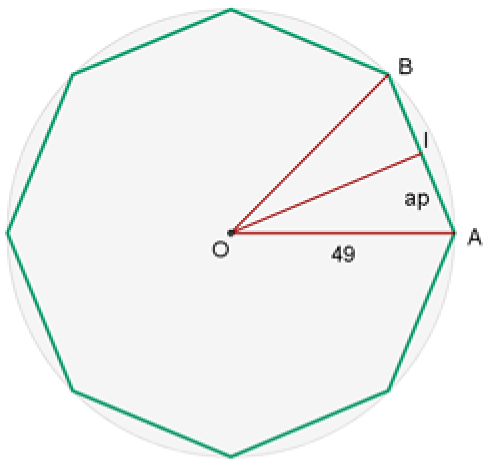
2.- $\dfrac{\sec^2a-\cos^2a}{tg^2a}$ $\qquad \dfrac{\sec^2a-\cos^2a}{tg^2a}=\dfrac{\frac{1}{\cos^2a}-\cos^2a}{tg^2a}=\dfrac{1-\cos^4a}{\cos^2a\cdot tg^2a}=$

$$=\frac{(1-\cos^2a)(1+\cos^2a)}{sen^2a}=1+\cos^2a$$

3.- $\dfrac{cosec^2a-sen^2a}{cosec^2a\cdot(2-\cos^2a)}$ $\qquad \dfrac{cosec^2a-sen^2a}{cosec^2a\cdot(2-\cos^2a)}=\dfrac{1}{2-\cos^2a}-\dfrac{sen^4a}{2-\cos^2a}=$

$$=\frac{1-sen^4a}{1+1-\cos^2a}=\frac{1-sen^4a}{1+sen^2a}=\frac{(1+sen^2a)(1-sen^2a)}{1+sen^2a}=\cos^2a$$

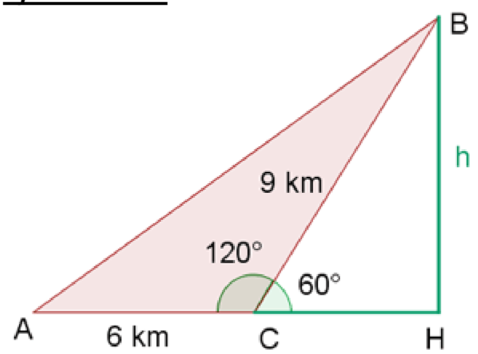
Ejercicio nº 4.-



$O=\dfrac{360^\circ}{8}=45^\circ$ $\qquad \dfrac{O}{2}=22^\circ30'$

$\dfrac{l}{2}=49\cdot sen\,22^\circ30'=18.75$ $\quad l=37.50$ cm $\qquad ap=49\cdot\cos 22^\circ30'=45.27$ cm

Ejercicio nº 5.-



$CH=9\cos 60^\circ$ $\qquad BH=9sen\,60^\circ$

$AB=\sqrt{(6+9\cos 60^\circ)^2+(9sen\,60^\circ)^2}=13.077\ km$

Ejercicio nº 6.-

1.- $\frac{\pi}{3}=\frac{180^{o}}{\alpha}$ $\quad \alpha=\frac{180^{o}\cdot 3}{\pi}=171.887^{o}=171^{o}\,53'14''$; $0.887^{o}\cdot 60=53.24'$ $\quad 0.24'\cdot 60=14''$

2.- $\frac{2\pi}{5}rad=\frac{2\cdot 180^{o}}{5}=72^{o}$

3.- $\frac{3\pi}{10}rad=\frac{3\cdot 180^{o}}{10}=54^{o}$

Ejercicio nº 7.-

1.- $\frac{\pi}{\alpha}=\frac{180^{o}}{316^{o}}$ $\quad \alpha=\frac{316\pi}{180}=\frac{79\pi}{45}rad$

2.- $\frac{\pi}{\alpha}=\frac{180^{o}}{10^{o}}$ $\quad \alpha=\frac{10\pi}{180}=\frac{\pi}{18}rad$

3.- $\frac{\pi}{\alpha}=\frac{180^{o}}{127^{o}}$ $\quad \alpha=\frac{127\pi}{180}=2.216\ rad$

Ejercicio nº 8.-

$\operatorname{sen}\ \alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{2}}=-\frac{\sqrt{15}}{4}$ $\qquad \operatorname{cosec}\ \alpha=-\frac{4\sqrt{15}}{15}$

$\cos\ \alpha=\frac{1}{4}$ $\qquad \sec\ \alpha=4$; $\operatorname{tg}\ \alpha=-\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}}=-\sqrt{15}$ $\qquad \operatorname{cotg}\ \alpha=-\frac{\sqrt{15}}{15}$

Ejercicio nº 9.-

$\sec\ \alpha=-\sqrt{1+4}=-\sqrt{5}$ $\qquad \cos\ \alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\operatorname{sen}\ \alpha=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\qquad \operatorname{cosec}\ \alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\operatorname{tg}\ \alpha=2$ $\qquad \operatorname{cotg}\ \alpha=\frac{1}{2}$

Ejercicio nº 10.-

1.- $sin(225^{\circ})=sin\,(180^{o}+45^{o})=-sin\,45^{o}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(225^{\circ})=\cos\,(180^{o}+45^{o})=-\cos 45^{o}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan(225^{\circ})=\tan(180^{o}+45^{o})=\tan 45^{o}=1$

2.- $$\sin(330^\circ) = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(330^\circ) = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(330^\circ) = \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

3.- $$\begin{array}{l|l} 2655^\circ & 360^\circ \\ \hline 135^\circ & 7 \end{array}$$

$$sen 2655^\circ = sen 135^\circ = sen(180^\circ - 45^\circ) = sen 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 2655^\circ = \cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; tg\, 2655^\circ = -1$$

4.- $$\begin{array}{l|l} -840^\circ & 360^\circ \\ \hline -120^\circ & -2 \end{array}$$

$$\sin(-840^\circ) = \sin(-120^\circ) = -\sin(180^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-840^\circ) = \cos(-120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(-840^\circ) = \tan(-120^\circ) = -\tan(120^\circ) = \sqrt{3}$$

Ejercicio nº 11.-

1.- $$tg\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot sen\,\alpha} = = \frac{1}{\cos\alpha \cdot sen\,\alpha} = \sec\alpha \cdot \text{cosec}\,\alpha$$

2.- $$\cos^2 a + (\text{cotg}\, a \cdot \cos a)^2 = \cos^2 a + \text{cotg}^2\, a \cdot \cos^2 a =$$

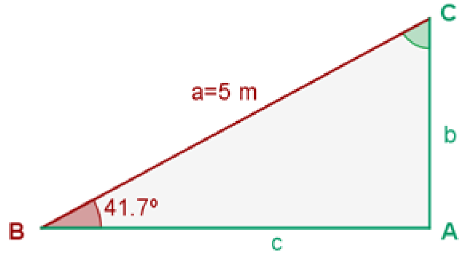
$$\cos^2 a(1 + \text{cotg}^2\, a) = \cos^2 a \cdot \text{cosec}^2\, a = \frac{\cos^2 a}{sen^2\, a} = \text{cotg}^2\, a$$

3.- $$sen^2 a \cdot \cos^2 a + \cos^4 a = \cos^2 a(sen^2 a + \cos^2 a) = \cos^2 a = \frac{1}{\sec^2 a}$$

4.- $$\text{cotg}\, a \cdot \sec a = \frac{\cos a}{sen\, a} \cdot \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{sen\, a} = \text{cosec}\, a$$

5.- $$\sec^2 a + \text{cosec}^2\, a = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{sen^2\, a} = \frac{sen^2\, a + \cos^2 a}{sen^2\, a \cdot \cos^2 a} = \frac{1}{sen^2\, a \cdot \cos^2 a}$$

Ejercicio nº 12.-

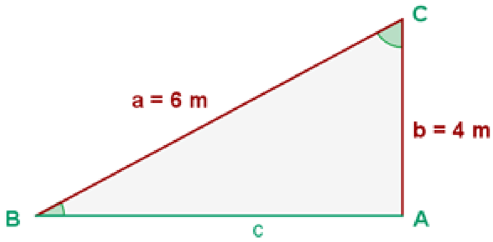


$C = 90^\circ - 41.7^\circ = 48.3^\circ$

$b = a \cdot sen B$ $\quad$ $b = 5 \cdot sen 41.7^\circ = 3.326 m$

$c = a \ \cos B$ $\quad$ $c = 5 \ \cos 41.7^\circ = 3.733 m$

Ejercicio nº 13.-

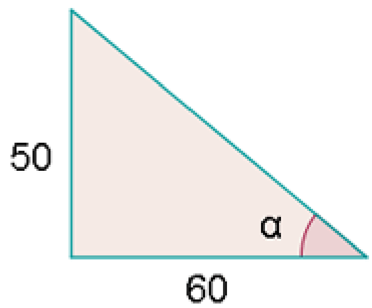


$$C = \arccos \frac{4}{6} = 48.19^\circ$$

$B = 90^\circ - 48.19^\circ = 41.81^\circ$

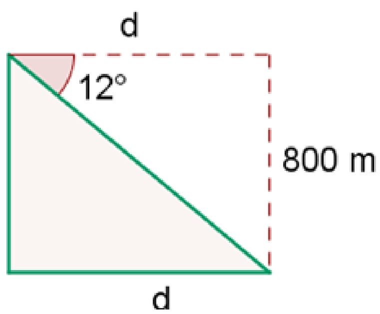
$c = a \cdot sen C$ $\quad$ $c = 6 \cdot sen 48.19^\circ = 4.47 m$

Ejercicio nº 14.-



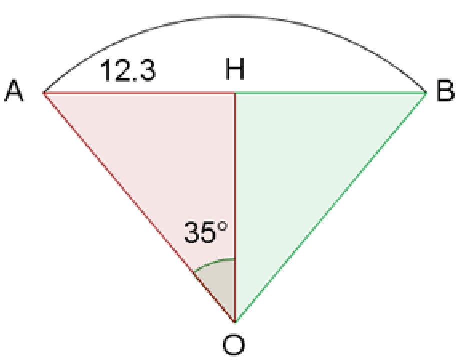
$$tg\,\alpha = \frac{50}{60} \qquad \alpha = 39^\circ 48' 43''$$

Ejercicio nº 15.-



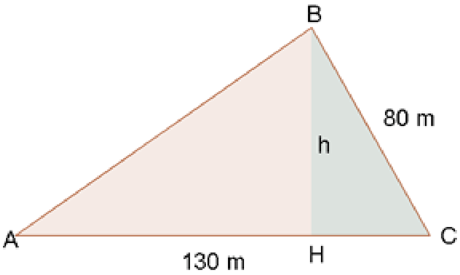
$$tg\,12^\circ = \frac{800}{d} \qquad d = 3763.70 \text{ m}$$

Ejercicio nº 16.-



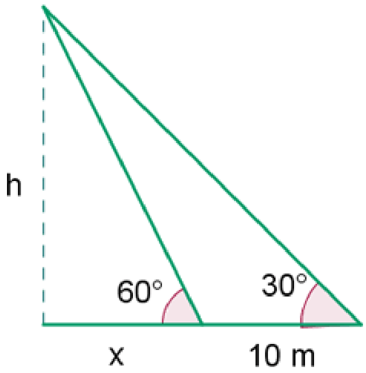
$$sen\,35^\circ = \frac{12.3}{OA} \qquad OA = \frac{12.3}{sen\,35^\circ} = 21.44 \ cm$$

Ejercicio nº 17.-



$$h = 80 \cdot sen\,70^\circ \qquad A = \frac{130 \cdot 80 \cdot sen\,70^\circ}{2} = 4886.40 m^2$$

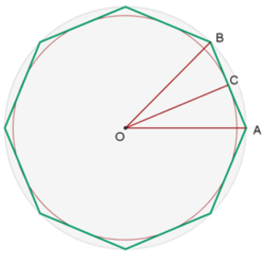
Ejercicio nº 18.-



$$tg\,30^\circ = \frac{h}{10+x} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{10+x} \qquad tg\,60^\circ = \frac{h}{x} \qquad \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\begin{array}{rr} 10\sqrt{3} + \sqrt{3}x = & 3h \\ -\sqrt{3}x = & -h \\ \hline 10\sqrt{3} \qquad = & 2h \end{array} \qquad h = 5\sqrt{3}$$

Ejercicio nº 19.-

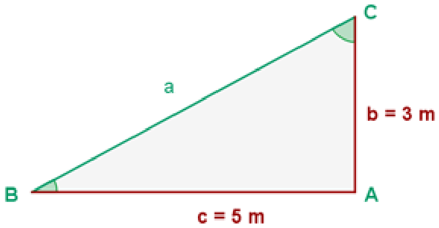


$$O = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \qquad \frac{O}{2} = 22^\circ 30'$$

Radio de la circunferencia inscrita: $OC = \dfrac{AC}{tg\,22^\circ 30'}$ $\qquad OC = \dfrac{6}{0.4142} = 14.49$

Radio de la circunferencia circunscrita: $OA = \dfrac{AC}{sen\,22^\circ 30'}$ $\qquad OC = \dfrac{6}{0.3827} = 15.68$

Ejercicio nº 20.-



$$C = arc\,tg\,\frac{5}{3} = 59.04^\circ \qquad B = 90^\circ - 59.04^\circ = 30.96^\circ$$

$$a = \frac{c}{sen\,C} \qquad a = \frac{5}{sen\,59.04^\circ} = 5.831\,m$$