2 Determinantes

1. Calcula el valor de los siguientes determinantes de segundo orden:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$

2. Aplicando la regla de Sarrus, calcula el valor de los siguientes determinantes de tercer orden:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & -5 & 9 \\ 10 & -10 & 19 \end{vmatrix}$

3. Halla el valor de x en cada uno de los siguientes determinantes de segundo orden:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4-x \end{vmatrix} = 2$ c) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 2x & 4 \end{vmatrix} = -5$ d) $\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 5-x & 4 \end{vmatrix} = 0$

4. Halla el valor de x en cada uno de los siguientes determinantes de tercer orden:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 4 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 48$ c) $\begin{vmatrix} 1-x & 2x-3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -143$

5. Desarrolla cada uno de los determinantes siguientes por los elementos de la fila o columna que más ceros posea y, posteriormente, calcula su valor:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

6. Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

7. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$

8. Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X - B = C$ siendo:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

9. Calcula el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro t: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 2 & 4 & t \\ t & 6 & 9 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

1. a) $-2 + 15 = 13$ c) $-7 - 18 = -25$

b) $4 - 6 = -2$ d) $8 + 10 = 18$

2. a) $45 + 96 + 84 - (105 + 48 + 72) = 0$

b) $-45 - 96 - 84 - (-105 - 48 - 72) = 0$

c) $42 - 0 - 6 - (0 + 4 + 90) = -58$

d) $95 - 240 + 450 - (-400 + 90 + 285) = 330$

3. a) $-2 - 3x = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

b) $4 - x - 12 = 2 \Rightarrow x = -10$

c) $4x + 6x = -5 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

d) $8 - 4x - 15 + 3x = 0 \Rightarrow x = -7$

4. a) $-5 - 2x - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$

b) $15x + 24x - 12x - 15x - 12x + 24x = 48 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2$

c) $-2 + 2x + 30x - 45 = -143 \Rightarrow x = -3$

5. a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -14 + 48 = 34$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$

$= -8 - 15 = -23$

6. ▪ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj } A)^t = -1 \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^t =$

$= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

▪ $B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{adj } B)^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

▪ $C^{-1} = \frac{1}{|C|} (\text{adj } C)^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 28 & 6 \\ -7 & -19 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}^t =$

$= \begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 28 & -19 & 5 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

▪ $D^{-1} = \frac{1}{|D|} (\text{adj } D)^t = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}^t =$

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{7}{18} \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}$

7. ▪ $|A| = -28 \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 3$

▪ $|B| = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow$ rango $B = 2$

▪ $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \Rightarrow$ rango $C = 3$

▪ C_1 y C_2 son independientes y además:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rango $D = 2$

8. $X = A^{-1} \cdot (C + B) =$

$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \\ 4 & 8 & 6 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -3 & -\frac{5}{2} & -2 \\ -1 & -\frac{7}{2} & -2 \\ 2 & \frac{13}{2} & 4 \end{pmatrix}$

9. $|A| = -2t^2 + 6t = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2 \\ t = 3 \Rightarrow \text{rango } A = 2 \end{cases}$

Para cualquier otro valor de t, el rango de la matriz es 3.

2 Determinantes

1. Se considera el determinante de tercer orden $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

a) Sustituye la tercera fila por la diferencia entre ella misma y la segunda multiplicada por un cierto número de manera que el primer elemento de la nueva tercera fila sea nulo. ¿Es este nuevo determinante equivalente al primero? Factoriza todos los elementos que puedas en el determinante hallado.

b) De la misma forma, y considerando el nuevo determinante obtenido en el apartado anterior, sustituye la segunda fila por la diferencia entre ella misma y la primera multiplicada por un cierto número de manera que el primer elemento de la nueva segunda fila sea también nulo.

c) Desarrolla el determinante por los elementos de la primera columna, extrayendo los factores comunes de las columnas que se pueda y factorizando el resultado.

d) Aplica lo anterior para obtener el valor de $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$

2. Se considera el determinante de cuarto orden $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

a) Aplicando un procedimiento análogo al utilizado en la anterior actividad, reduce el valor del determinante propuesto al producto de un número por el valor de un determinante de tercer orden. ¿Hace falta calcular el valor de este nuevo determinante o lo puedes deducir de la actividad anterior?

b) Calcula el valor del determinante para el caso en que $a = \log 2$, $b = \log 3$, $c = \log 4$ y $d = \log 5$

3. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 626 \end{vmatrix}$

4. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ a+b & b+c & c+a \\ r+s & s+t & t+r \end{vmatrix}$

5. a) Comprueba que los números 297, 351 y 405 son todos múltiplos de 27.

b) Demuestra, sin necesidad de desarrollarlo, que el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ es múltiplo de 27.

6. Calcula el valor del determinante de orden n: $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ -x & y & x & x \\ -x & -x & y & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & -x & -x & y \end{vmatrix}$

7. Compara el valor de los siguientes determinantes: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$ y $|B| = \begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix}$

SOLUCIONES

1. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{F_3 - aF_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ac \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} \underset{F_2 - aF_1}{=}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$

$= (b - a) \cdot (c - a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} =$

$= (b - a) \cdot (c - a) \cdot (c - b)$

d) $|A| = (3 - 2) \cdot (4 - 2) \cdot (4 - 3) = 2$

2. a) Restándole, a cada fila, la anterior multiplicada por a, se obtiene un determinante equivalente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ac & d^2 - ad \\ 0 & b^3 - ab^2 & c^3 - ac^2 & d^3 - ad^2 \end{vmatrix} =$$

$= (b - a) \cdot (c - a) \cdot (d - a) \cdot (c - b) \cdot$
$\cdot (d - b) \cdot (d - c)$

b) $|A| = (\log 3 - \log 2) \cdot (\log 4 - \log 2) \cdot$
$\cdot (\log 5 - \log 2) \cdot (\log 4 - \log 3) \cdot$
$\cdot (\log 5 - \log 3) \cdot (\log 5 - \log 4) =$
$= \log \frac{3}{2} \cdot \log 2 \cdot \log \frac{5}{2} \cdot \log \frac{4}{3} \cdot \log \frac{5}{3} \cdot$
$\cdot \log \frac{5}{4} = 0{,}000057$

3. $|A| = (2 - 1) \cdot (3 - 1) \cdot (4 - 1) \cdot (5 - 1) \cdot$
$\cdot (3 - 2) \cdot (4 - 2) \cdot (5 - 2) \cdot (4 - 3) \cdot (5 - 3) \cdot$
$\cdot (5 - 4) = 288$

4. $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ a+b & b+c & c+a \\ r+s & s+t & t+r \end{vmatrix} \underset{C_1 + C_2 + C_3}{=}$

$= \begin{vmatrix} 2(x+y+z) & y+z & z+x \\ 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 2(r+s+t) & s+t & t+r \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot \begin{vmatrix} x+y+z & y+z & z+x \\ a+b+c & b+c & c+a \\ r+s+t & s+t & t+r \end{vmatrix} \underset{C_2 - C_3}{=}$

$= 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y+z & z+x \\ a & b+c & c+a \\ r & s+t & t+r \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_1}{=}$

$= 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y+z & z \\ a & b+c & c \\ r & s+t & t \end{vmatrix} \underset{C_2 + C_3}{=}$

$= 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$

5. a) $27 \cdot 11 = 297 \quad 27 \cdot 13 = 315 \quad 27 \cdot 15 = 405$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \underset{C_3 + 10C_2 + 100C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 9 & 297 \\ 3 & 5 & 351 \\ 4 & 0 & 405 \end{vmatrix}$

Como todos los elementos de la última columna son múltiplos de 27, se puede extraer este número como factor común y, por tanto, el valor del determinante es múltiplo de 27.

6. Sumando, a cada fila, la fila 1, se obtiene un determinante equivalente:

$$\begin{vmatrix} x & x & \dots & x \\ 0 & y+x & \dots & 2x \\ 0 & 0 & \dots & 2x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y+x \end{vmatrix} = x \cdot (y + x)^{n-1}$$

7. $|B| = \begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz} \begin{vmatrix} yz & x & x^2 \\ xz & y & y^2 \\ xy & z & z^2 \end{vmatrix} =$

$= \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} xyz & x^2 & x^3 \\ xyz & y^2 & y^3 \\ xyz & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz} \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = |A|$

El valor de los dos determinantes coincide.