Ejercicio 1:

Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.

Ejercicio 2:

Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración.

1. Representar la información en dos matrices.
2. Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

Ejercicio 3:

Una empresa de muebles fabrica tres modelos de estanterías: A, B y C. En cada uno de los tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo A, 8000 grandes y 6000 pequeñas de tipo B, y 4000 grandes y 6000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos.

1 Representar esta información en dos matrices.

2 Hallar una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería.

SOLUCIONES

Solución Ejercicio 1:

Cada mes: $$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} E & M & L \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array} & \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cada año: $$12 \cdot \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 12 & 8 & 5 \\ 18 & 20 & 12 \end{pmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} E & M & L \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{BUTACAS} \\ \text{MECEDORAS} \\ \text{SILLAS} \end{array} & \begin{pmatrix} 240 & 180 & 120 \\ 144 & 96 & 60 \\ 216 & 240 & 144 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solución Ejercicio 2:

Matriz de producción:

Filas: Modelos A y B Columnas: Terminaciones N, L, S

$$M = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$$

Matriz de coste en horas:

Filas: Terminaciones N, L, S Columnas: Coste en horas: T, A

$$N = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix}$$

Matriz que expresa las horas de taller y de administración para cada uno de los modelos:

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1.2 \\ 33 & 1.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix}$$

Solución Ejercicio 3:

Filas: Modelos A, B, C Columnas: Tipos G, P

$$M = \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix}$$

Matriz de los elementos de las estanterías:

Filas: Tipos G, P Columnas: T, S

$$N = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz que expresa el número de tornillos y soportes para cada modelo de estantería:

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix}$$

1.17. (TIC) Halla la matriz inversa de las siguientes matrices por el método de Gauss - Jordan y comprueba los resultados.

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

1º Se construye la matriz $(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

2º Se realizan transformaciones en la matriz anterior hasta obtener la matriz $(I_3 \mid A^{-1})$.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{F_2 \to -F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

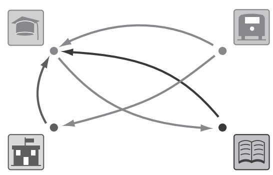
$$\xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -7 & \frac{-4}{3} & \frac{-8}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1 \to F_1 + F_2]{F_3 \to -\frac{1}{7}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_3]{F_1 \to F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{21} & -\frac{2}{21} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} \\ \frac{-1}{21} & \frac{-2}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$. Se puede comprobar que $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} \\ \frac{-1}{21} & \frac{-2}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{21} & \frac{8}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$

En el segundo caso, se comprueba que $F_3 = F_2 - F_1$, por lo que rg(B)=2 y B no tiene inversa.

1.18. El grafo relaciona 4 puntos importantes de una ciudad:



a) Formar la matriz *M* asociada al grafo.

b) ¿Qué sentido tiene la matriz M^2?

a) Si denotamos por U a la universidad, E a la estación de autobuses, A al ayuntamiento y B a la biblioteca, tenemos que la matriz asociada al grafo es:

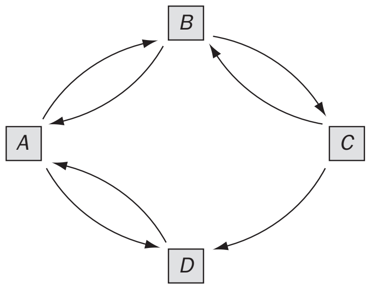
$$\begin{array}{l} \text{Hasta:} \quad U \;\; E \;\; A \;\; B \\ \text{Desde:} \begin{cases} U \\ E \\ A \\ B \end{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

b) Formemos la matriz M^2: $MM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$

La matriz M^2 expresa en qué forma se pueden establecer comunicaciones entre los puntos importantes de la ciudad pasando por uno de ellos.
Así, por ejemplo, el elemento c_{24} es igual a 1, eso significa que desde la estación de trenes se puede comunicar con la biblioteca a través de otro punto de la ciudad, en este caso, el Ayuntamiento: $E \to A \to U$.

1.19. Las conexiones directas por avión entre cuatro ciudades se representan en la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

¿De cuántas formas se puede viajar de una ciudad a otra haciendo una escala? ¿Y haciendo dos escalas?



La matriz A^2 expresa en qué forma se puede establecer comunicaciones entre las cuatro ciudades haciendo una escala.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo:
$a_{11} = 2$ indica que hay dos formas diferentes de comunicar la ciudad *A* consigo misma haciendo una escala. En efecto haciendo escala en *B*: $A \to B \to A$ o haciendo escala en *D*: $A \to D \to A$.

$a_{12} = 0$ indica que no hay ningún modo de ir desde *A* hasta *B* haciendo una escala. Podemos comprobarlo si observamos el grafo asociado a esta situación.

$a_{13} = 1$ indica que hay un único modo de ir desde *A* hasta *C* haciendo escala en una ciudad. En efecto, $A \to B \to C$.

$a_{14} = 0$ indica que no hay ningún modo de ir desde *A* hasta *D* haciendo una escala.

Del mismo modo, la matriz $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ da las formas que tienen de comunicarse por avión las cuatro ciudades haciendo dos escalas.

Por ejemplo:

$a_{41} = 2$ indica que hay dos formas diferentes de comunicar la ciudad *D* con la ciudad *A* haciendo dos escalas. En efecto haciendo escala en *A* y *B*: $D \to A \to B \to A$ o haciendo escala en *A* y *D*: $D \to A \to D \to A$.

$a_{42} = 0$ indica que no hay ningún modo de ir desde *D* hasta *B* haciendo dos escalas. Podemos comprobarlo si observamos el grafo asociado a esta situación.

$a_{43} = 1$ indica que hay un único modo de ir desde *D* hasta *C* haciendo dos escalas. En efecto, $D \to A \to B \to C$.

$a_{44} = 0$ indica que no hay ningún modo de ir desde *D* hasta *D* haciendo dos escalas.

1.20. Dado el punto P(2, –1), halla su transformado mediante los siguientes movimientos:

a) Una traslación de vector guía $\vec{v}$ = (1, 3) primero y un giro de centro el origen y amplitud 90° después.

b) Un giro de centro el origen y amplitud 90º primero y una traslación de vector guía $\vec{v}$ = (1, 3) después.

c) ¿Has obtenido los mismos resultados? Trata de explicar a qué es debido.

a) Traslación de vector (1, 3): (2, –1) + (1, 3) = (3, 2)

Giro de centro el origen y amplitud 90º: $(3, 2)\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \text{sen}\, 90^\circ \\ -\text{sen}\, 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = (3, 2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-2, 3)$

b) Giro de centro el origen y amplitud 90º: $(2, -1)\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \text{sen}\, 90^\circ \\ -\text{sen}\, 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = (2, -1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 2)$

Traslación de vector (1, 3): (1, 2) + (1, 3) = (2, 5)

c) No se han obtenido los mismos resultados ya que como el producto de matrices no es conmutativo entonces, el producto de movimientos no es conmutativo.

1.48. (PAU) En el espacio vectorial de las matrices de orden 2 sobre R, consideramos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina si las matrices *A*, *B* y *C* son linealmente independientes.

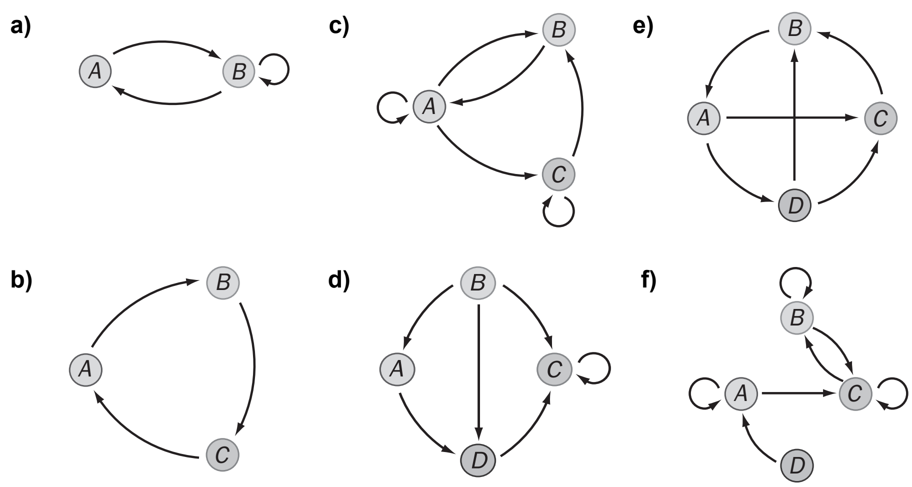
Las matrices *A*, *B*, *C* son linealmente dependientes si existen tres escalares, *x*, *y*, *z*, no todos nulos, tales que $xA + yB + zC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \\ x=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

La única solución es $x = 0$; $y = 0$, $z = 0$. Por tanto, las matrices *A*, *B* y *C* son linealmente independientes.

Aplicaciones de las matrices

1.49. Escribe la matriz asociada a cada uno de los siguientes grafos:



a)

		Hasta	
		A	*B*
Desde	*A*	0	1
	B	1	1

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.50. Dado el punto P de coordenadas (–4, 2), halla las coordenadas del punto transformado en los siguientes movimientos:

a) Una traslación de vector guía $\vec{v}$ = (4, 1)

b) Un giro de centro el origen y amplitud 30°

c) Una homotecia de centro el origen y razón 2

d) Una simetría respecto del origen

a) $P' = (-4, 2) + (4, 1) = (0, 3)$

b) $(p'_1, p'_2) = (-4, 2)\begin{pmatrix} \cos 90° & \operatorname{sen} 90° \\ -\operatorname{sen} 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = (-4, 2)\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = (-2\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-2)$

c) $(p'_1, p'_2) = (-4, 2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (-8, 4)$

d) $(p'_1, p'_2) = (-4, 2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (4, -2)$

1.65. (PAU) Para cada número entero n, se considera la matriz: $A_n = \begin{pmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{pmatrix}$, $x \in R$

a) Comprueba que $A_n A_m = A_{n+m}$. **b) Como aplicación de lo anterior, calcula A_n^{-1}**

a) Multiplicando, se tiene: $A_n A_m = \begin{pmatrix} \cos nx & \operatorname{sen} nx \\ -\operatorname{sen} nx & \cos nx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos mx & \operatorname{sen} mx \\ -\operatorname{sen} mx & \cos mx \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos nx \cos my - \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} my & \cos nx \operatorname{sen} my + \operatorname{sen} nx \cos my \\ -\operatorname{sen} nx \cos my - \cos nx \operatorname{sen} my & -\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} my + \cos nx \cos my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x(n+m) & \operatorname{sen} x(n+m) \\ -\operatorname{sen} x(n+m) & \cos x(n+m) \end{pmatrix} = A_{n+m}$

b) Basta observar que $A_n A_{-n} = A_0 = I \Rightarrow A_n^{-1} = A_{-n}$.

Por tanto, la matriz $A_n^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-n)x & \operatorname{sen}(-n)x \\ -\operatorname{sen}(-n)x & \cos(-n)x \end{pmatrix}$

1.66. (PAU) a) Sean P y Q dos matrices cuadradas n x n. ¿Bajo qué condiciones se verifica la siguiente igualdad?

$$(P + Q)(P - Q) = P^2 - Q^2$$

b) Comprueba si se verifica la igualdad anterior para las matrices: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Tiene que verificarse la propiedad conmutativa del producto, es decir, $PQ = QP$.

b) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; $QP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $PQ \neq QP$, no se verifica la igualdad anterior.

1.67. (PAU) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 4 \\ 6 & -5 & -6 & 12 \\ 3 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ verifica $A^2 = A$ (no es preciso comprobarlo), determina un valor no nulo del número real λ tal que $(\lambda A - I)^2 = I$, siendo I la matriz identidad.

Desarrollamos la expresión $(\lambda A - I)^2$:

$(\lambda A - I)^2 = (\lambda A - I)(\lambda A - I) = (\lambda A)(\lambda A - I) - I(\lambda A - I) = (\lambda A)(\lambda A) - \lambda A - \lambda A + I = \lambda^2 A^2 - 2\lambda A + I$.

Tenemos que resolver la ecuación $\lambda^2 A^2 - 2\lambda A + I = I \Rightarrow \lambda^2 A^2 - 2\lambda A = 0$

Como $A^2 = A$, sustituyendo resulta $\lambda^2 A - 2\lambda A = 0$, es decir, $(\lambda^2 - 2\lambda)A = 0$

Como $A \neq 0$, entonces $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, $\lambda = 2$. Luego la solución pedida es $\lambda = 2$.

1.68. En la sala de un hospital dedicado al tratamiento de diabéticos se administra insulina de tres clases: semilenta, lenta y ultralenta. El número de unidades diarias que se aplica a cada paciente de los cinco ingresados viene dado por la siguiente tabla:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
Semilenta	15	15	20	30	10
Lenta	20	20	15	5	20
Ultralenta	10	5	10	10	15

Teniendo en cuenta que el número de días que ha estado internado cada uno de los pacientes es el siguiente:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
N.º de días	3	7	5	12	20

Calcula con ayuda del producto de matrices, cuantas unidades de cada clase le fue administrada a cada paciente.

Obtenemos la matriz unidades diarias: A. Si representamos por D el vector columna que expresa el número de días que ha estado internado cada uno de los pacientes, se tiene el número de unidades de cada clase que se administró a cada paciente se obtiene multiplicando la matriz A por la matriz D:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 20 & 30 & 10 \\ 20 & 20 & 15 & 5 & 20 \\ 10 & 5 & 10 & 10 & 15 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow AD = \begin{pmatrix} 810 \\ 735 \\ 535 \end{pmatrix}$$

Así pues, se necesitan: 810 unidades de insulina semilenta, 735 unidades de insulina lenta y 535 de ultralenta.

1.69. En el dibujo están representados los cuatro equipos de rescate de una región de montaña. Las flechas indican las direcciones posibles de comunicación por radio. Por ejemplo, el equipo de rescate *D* puede comunicar directamente con *C* pero no con *A*. El equipo *D* puede comunicar con *A* pero a través de *C*.

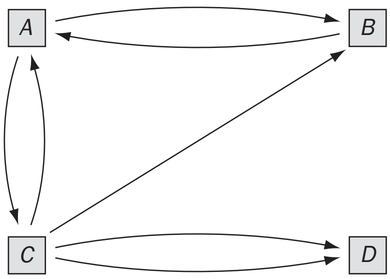
a) Dibuja el grafo asociado a esta situación.

b) Forma la matriz *M* asociada al grafo.

c) Forma la matriz *M*² e interpreta sus elementos.

d) Interpreta la matriz *M* + *M*².

a) Si denotamos con *A* al equipo de rescate que lleva casco rojo, por *B* al equipo del casco naranja, por *C* al equipo del casco verde y por *D* al equipo del casco azul, entonces tenemos el grafo asociado de la derecha.



b) Expresamos con: $\begin{cases} 1 = \text{ comunicar directamente} \\ 0 = \text{ no comunicar directamente} \end{cases}$

Al equipo: *A* *B* *C* *D*

Del equipo $\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M$ es la matriz asociada al grafo dado.

c) Si hallamos la matriz $M^2 = MM$, obtenemos: $M^2 = MM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz M^2 expresa en qué forma se pueden establecer comunicaciones entre los equipos a través de otro.

Por ejemplo, vemos que:

$a_{11} = 2$ significa que A puede comunicarse con A de dos formas distintas a través de otro equipo:

$A \rightarrow B \rightarrow A$ y $A \rightarrow C \rightarrow A$

$a_{12} = 1$ significa que *A* puede comunicarse con *B* de una sola forma a través de otro equipo: $A \rightarrow C \rightarrow B$

$a_{13} = 0$ significa que *A* no puede comunicarse con *C* a través de otro equipo:

Análogamente para los demás elementos de la matriz *A*.

d) La matriz $T = M + M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ da las formas que tienen de comunicarse por radio los cuatro equipos, bien directamente, bien a través de otro equipo.

Por ejemplo, $t_{24} = 0$ significa que el equipo *B* no puede comunicarse con el equipo *D* ni directamente ni a través de un equipo.

PROFUNDIZACIÓN

1.70. (PAU) Discute razonadamente y en función de *a* y *b* el rango de la matriz A dada por: $\begin{pmatrix} a & 3 & 12 & 6 \\ b & 1 & 4 & 2 \\ a+b & 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

Las columnas tercera y cuarta son proporcionales de la segunda. Por tanto, dependen de ella y no aportan nada al rango de la matriz. Para estudiar su rango nos fijaremos, pues, solamente en las dos primeras columnas.

Observamos que si $a = 3b$, la primera columna es $\begin{pmatrix} 3b \\ b \\ 4b \end{pmatrix}$ y, por tanto, proporcional a la segunda columna,

entonces: si $a = 3b \Rightarrow$ rg(*A*) = 1, y si $a \neq 3b \Rightarrow$ rg(*A*) = 2