MATEMATICAS. BC2   TEMA 1: Sistemas de Ecuaciones. Método de Gauss

Ejercicio nº 1.-

Resuelve los siguientes sistemas, utilizando el método de Gauss:

a) $\left.\begin{array}{r} -3x+y+z=1 \\ x-2y+z=4 \\ -x+y-3z=-7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ 3x+y-z=-3 \\ x-3y+3z=9 \\ 2x+4y-4z=-12 \end{array}\right\}$

Ejercicio nº 2.-

Discute el siguiente sistema en función del parámetro *a*, y resuélvelo cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5y+(a+5)z=0 \\ 3x+3y-z=0 \\ 3x+4y+6z=0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 3.-

En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres.

a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay?

b) Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

Ejercicio nº 4.-

Discute y resuelve según los valores del parámetro $\alpha \in P$ el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2t=3 \\ 3x-y+z-t=1 \\ 5x-3y+2z-4t=2\alpha \\ 2x+y+z+t=2 \end{array}\right\}$$

SOLUCIONES:

Ejercicio nº 1.-

Resuelve los siguientes sistemas, utilizando el método de Gauss:

$$\text{a)}\quad \left.\begin{aligned} -3x+y+z&=1\\ x-2y+z&=4\\ -x+y-3z&=-7 \end{aligned}\right\} \qquad\qquad \text{b)}\quad \left.\begin{aligned} 2x-y+z&=3\\ 3x+y-z&=-3\\ x-3y+3z&=9\\ 2x+4y-4z&=-12 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\text{a)}\ \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 4\\ -1 & 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 2^a\\ 1^a\\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4\\ -3 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a\\ 3\cdot 1^a+2^a\\ 3^a+1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & -5 & 4 & 13\\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a\\ -3^a\\ 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & 4 & 13 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a\\ 2^a\\ 3^a+5\cdot 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 14 & 28 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{aligned} x-2y+z&=4\\ y+2z&=3\\ 14z&=28 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{28}{14}=2\\ y=3-2z=3-4=-1\\ x=2y-z+4=-2-2+4=0 \end{cases}$$

La solución es (0, –1, 2).

$$\text{b)}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3\\ 3 & 1 & -1 & -3\\ 1 & -3 & 3 & 9\\ 2 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 3^a\\ 2^a\\ 1^a\\ 4^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 9\\ 3 & 1 & -1 & -3\\ 2 & -1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 1^{a} \\ 2^{a}-3\cdot 1^{a} \\ 3^{a}-2\cdot 1^{a} \\ 4^{a}-2\cdot 1^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 10 & -10 & -30 \\ 0 & 5 & -5 & -15 \\ 0 & 10 & -10 & -30 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} 1^{a} \\ 2^{a}:10 \\ 3^{a}:5 \\ 4^{a}:10 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-2^{a} \\ 4^{a}-2^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y+3z=9 \\ y-z=-3 \end{array}\right\}$$

Pasamos la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y=9-3z \\ y=-3+z \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=3y+9-3z=3(-3+z)+9-3z=0 \\ y=-3+z \end{array}$$

Las soluciones del sistema son:

$x=0, \quad y=-3+\lambda, \quad z=\lambda, \quad$ con $\quad \lambda \in$ P

Ejercicio nº 2.-

Discute el siguiente sistema en función del parámetro *a*, y resuélvelo cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5y+(a+5)z=0 \\ 3x+3y \qquad -z=0 \\ 3x+4y \qquad +6z=0 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & a+5 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} 2^{a} \\ 3^{a} \\ 1^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & a+5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 1^{a} \\ 2^{a}-1^{a} \\ 3\cdot 3^{a}-2\cdot 1^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -21 & 3a+17 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}+21\cdot 2^{a} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3a+164 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $3a+164=0$, es decir, si $a=\frac{-164}{3}$, el sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} 3x+3y-z=0 \\ y+7z=0 \end{aligned}\right\}$$ Pasamos la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{aligned} 3x+3y=z \\ y=-7z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x&=\frac{z-3y}{3}=\frac{z+21z}{3}=\frac{22z}{3} \\ y&=-7z \end{aligned}$$

Sería compatible indeterminado, con soluciones:

$$x=\frac{22}{3}\lambda,\ \ y=-7\lambda,\ \ z=\lambda,\ \ \text{con}\ \ \lambda\in\mathbb{R}$$

- Si $a\neq\frac{-164}{3}$, sería compatible determinado. Su única solución sería $(0,\ 0,\ 0)$.

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres.

a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay?

b) Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

Solución:

a) Llamemos x al número de hombres, y al de mujeres y z al de niños.

Como hay 22 personas, tenemos que:

$x+y+z=22$

Con el otro dato, planteamos otra ecuación:

$2y+3z=2x$

Solo con estos datos no podemos saber el número de hombres (ni el de mujeres, ni el de niños) que hay. Es un sistema compatible indeterminado; como tenemos tres incógnitas, para que pueda ser compatible determinado, necesitamos otra ecuación.

b) Añadiendo una tercera ecuación con el dato que nos dan, planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=22 \\ -2x+2y+3z=0 \\ x=2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3y+z=22 \\ -2y+3z=0 \\ \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z=22-3y \\ -2y+66-9y=0 \\ \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z=22-18=4 \\ -11y=-66 \;\rightarrow\; y=6 \\ x=12 \end{array}$$

Por tanto, hay 12 hombres, 6 mujeres y 4 niños.

Ejercicio nº 4.-

Discute y resuelve según los valores del parámetro $\alpha \in P$ el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2t=3 \\ 3x-y+z-t=1 \\ 5x-3y+2z-4t=2\alpha \\ 2x+y+z+t=2 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2t=3 \\ 3x-y+z-t=1 \\ 5x-3y+2z-4t=2\alpha \\ 2x+y+z+t=2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -4 & 2\alpha \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a-2\cdot 2^a \\ 4^a-2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 2\alpha-2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a+1^a \\ 4^a-2\cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha+1 \\ -3 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 2^a \\ 1^a \\ 4^a \\ 3^a \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha+1 \end{pmatrix}$$

$$2\alpha+1=0 \;\rightarrow\; \alpha=-\frac{1}{2}$$

- Si $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, el sistema es incompatible.

- Si $\alpha = -\frac{1}{2}$, el sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos.

$$3^{\text{a}} \text{ ecuación } \rightarrow -3x - 2t = -5 \rightarrow x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t$$

$$2^{\text{a}} \text{ ecuación } \rightarrow x + y + 2t = 3 \rightarrow \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t + y + 2t = 3 \rightarrow y = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}t$$

$$1^{\text{a}} \text{ ecuación } \rightarrow 3x - y + z - t = 1 \rightarrow 3\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t\right) - \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}t\right) + z - t = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5 - 2t - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}t + z - t = 1 \rightarrow z = -\frac{8}{3} + \frac{5}{3}t$$

Si consideramos $t = 1 + 3\lambda$, la solución del sistema es:

$x = 1 - 2\lambda$, $y = -4\lambda$, $z = -1 + 5\lambda$, $t = 1 + 3\lambda$, con $\lambda \in \mathrm{P}$