20 Aplicaciones de la integral definida

1. Representa la curva $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ y halla el valor del área limitada por esa curva, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

2. Sea el polinomio $P(x) = x^3 - ax^2$.

a) Determina el valor de a de modo que en $x = 1$ la función $P(x)$ tenga un punto de inflexión.

b) Halla el valor del área del recinto limitado por la gráfica de $P(x)$ y el eje OX.

3. Halla el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \text{L}x$ y las rectas $x = 1$, $x = \dfrac{5}{2}$.

4. Halla el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

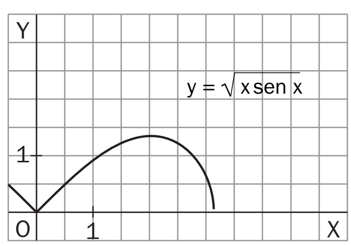
5. Calcula el volumen del cuerpo que se obtiene al girar la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2}}$ alrededor del eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$.

6. Se consideran las funciones: $f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ -x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

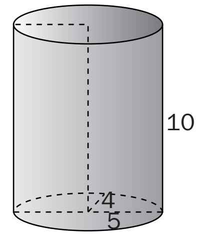
a) Dibuja las gráficas de ambas funciones en los mismos ejes de coordenadas.

b) Calcula el área del recinto acotado limitado por las gráficas de ambas funciones.

7. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje el recinto limitado por la gráfica de la función $y = \sqrt{x \text{ sen } x}$, con $0 \leqslant x \leqslant \pi$, y el eje OX.



8. El área de una elipse de semiejes a y b es $S = \pi \cdot a \cdot b$. Calcula el volumen de una superficie cilíndrica que tiene por base una elipse de semiejes 5 y 4 cm, respectivamente, y por altura 10 cm.

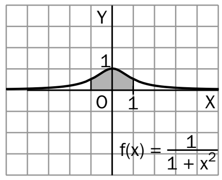


9. Un cuerpo de tres dimensiones tiene por base un círculo de radio 5 cm. Todas las secciones perpendiculares a un diámetro fijo de dicho círculo son cuadrados. Halla el volumen del sólido.

SOLUCIONES

1. $\text{Área} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1 + x^2}\,dx =$

$= \Big[\text{arctg } x\Big]_{-1}^{1} = \dfrac{\pi}{2}$ uc

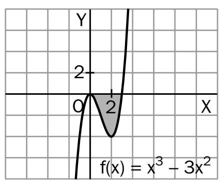


2. a) $P'(x) = 3x^2 - 2ax$ y $P''(x) = 6x - 2a$ entonces $P''(1) = 0 \Rightarrow a = 3$

b) La función es $P(x) = x^3 - 3x^2$

$\text{Área} = -\displaystyle\int_0^3 (x^3 - 3x^2)\,dx = -\left[\frac{x^4}{4} - x^3\right]_0^3 =$

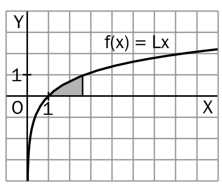
$= \dfrac{27}{4}$ uc



3. $\text{Área} = \displaystyle\int_1^{\frac{5}{2}} \text{L}x\,dx =$

$= \Big[x\text{L}x - x\Big]_1^{\frac{5}{2}} =$

$= \dfrac{1}{2}\left(5\ \text{L}\ \dfrac{5}{2} - 3\right)$ uc



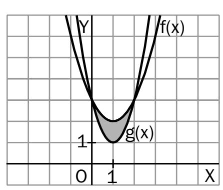
4. Puntos de corte en $x = 0$ y $x = 2$

$\text{Área} = \displaystyle\int_0^2 (x^2 - 2x + 3)\,dx -$

$- \displaystyle\int_0^2 (2x^2 - 4x + 3)\,dx =$

$= \displaystyle\int_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx =$

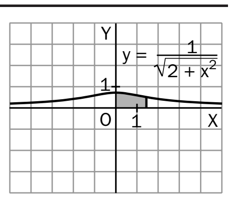
$= \left[\dfrac{-x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \dfrac{4}{3}$ uc



5. $V = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2 + x^2}}\right)^2 dx =$

$= \pi\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{2 + x^2} =$

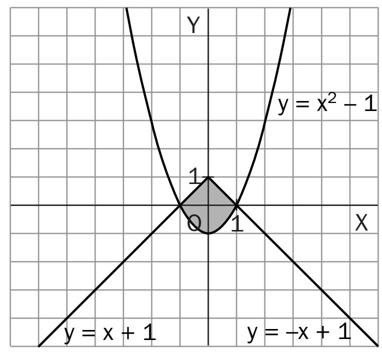
$= \pi\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\ \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi^2}{4\sqrt{2}}$ unidades cúbicas.



6. a) Puntos de corte en $x = -1$ si $x \leqslant 0$ y $x = 1$ si $x > 0$.

b) $\text{Área} = 2 \cdot \left(\dfrac{1 \cdot 1}{2} - \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 1)\,dx\right) =$

$= 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{7}{3}$ uc



7. $V = \displaystyle\int_0^{\pi} \pi(\sqrt{x\,\text{sen}\,x})^2\,dx = \pi\int_0^{\sqrt{2}} x\,\text{sen}\,x\,dx =$

$= \pi[-x\cos x + \text{sen}\,x]_0^{\pi} = \pi^2$ unidades cúbicas

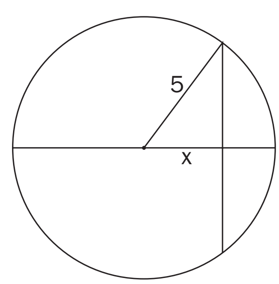
8. Las secciones que se obtienen al cortar el cilindro por planos paralelos a la base son siempre elipses de área

$A(x) = 4 \cdot 5 \cdot \pi = 20\pi$. Por tanto:

$V = \displaystyle\int_0^{10} 20\pi\,dx = 20\pi \cdot [x]_0^{10} = 20\pi \cdot 10 =$

$= 200\pi$ unidades cúbicas.

9. Las secciones que se obtienen al cortar el cuerpo por planos perpendiculares al diámetro son cuadrados de lado $2\sqrt{25 - x^2}$ y por tanto:



$A(x) = 4 \cdot (25 - x^2)$

El volumen se puede calcular mediante la integral:

$V = \displaystyle\int_{-5}^{5} 4 \cdot (25 - x^2) \cdot dx = 4\left(25x - \frac{x}{3}\right)$

20 Aplicaciones de la integral definida

1. Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) ¿Qué valores deben tomar a, b, c y d para que posea un máximo en el punto (1, 2), y un mínimo en el punto (−1, −2)?

b) ¿Tiene esta función algún punto de inflexión? En caso afirmativo, determina la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto.

c) Calcula el valor del área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas.

2. Calcula el valor de a sabiendo que la parábola $y = ax^2$ y la cúbica $y = x^3$ se cortan en el primer cuadrante encerrando una región limitada de área igual a $\frac{2}{3}a$.

3. Dadas las funciones siguientes:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \qquad g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

a) Halla $f(x)$.

b) Calcula el valor del área de la figura encerrada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

4. Halla el volumen engendrado por la región limitada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ al girar alrededor del eje de abscisas.

5. Calcula el volumen del sólido de revolución determinado por la región comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$ y las curvas $f(x) = (x - 2)^2$ y $g(x) = x^2$, al girar alrededor del eje OX.

6. Calcula el valor de a sabiendo que el área del recinto plano limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x + 1}$ y $g(x) = ax + a$ es igual a una unidad cuadrada.

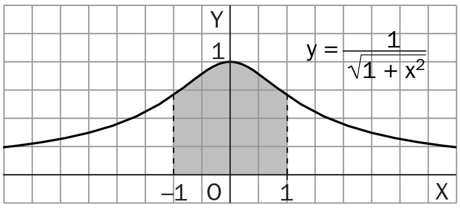
7. Se considera la parábola de ecuación $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 1$ y la recta de ecuación $y = -\frac{3}{4}x + a$:

a) Encuentra el valor de a para que uno de los puntos de corte de la parábola y la recta sea el (4, −1).

b) Para el valor hallado, encuentra todos los puntos de corte de ambas funciones.

c) Para este mismo valor, representa gráficamente la parábola y la recta y calcula el área de la región limitada por las dos funciones.

8. Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.



9. Cuando el caudal que mana de un grifo es una función cualquiera del tiempo, el volumen arrojado a lo largo de un cierto intervalo de tiempo coincide con el área limitada por la función caudal y el eje de abscisas y, por tanto, se puede calcular con la ayuda de una integral definida.

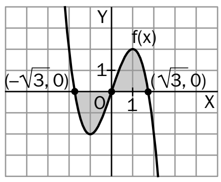
Se considera la función $c = 4 + t \cdot (t + 2)$ que representa el caudal que mana de un caño, donde c se mide en litros/minuto y t en minutos. Calcula el volumen que se consigue recoger en un pilón desde el instante $t = 0$ hasta el $t = 20$ minutos.

SOLUCIONES

1. a) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Resolviendo el sistema: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$, $f'(1) = 0$ y $f'(-1) = 0$; obtenemos $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$ y $d = 0$, es decir, $f(x) = x^3 + 3x$.

b) $f''(x) = 6x \Rightarrow$ (0, 0) es un punto de inflexión. La recta tangente en él es $y = 3x$.

c)



$$A = -\int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 + 3x)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} (x^3 + 3x)\,dx =$$

$$= \frac{27}{2} = 13{,}5 \text{ uc}$$

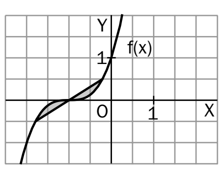
2. La parábola y la cúbica se cortan en (0, 0) y (a, 0), y en el intervalo (0, a) la parábola alcanza mayor valor que la cúbica. Por tanto:

$$A = \int_0^a (ax^2 - x^3)\,dx = \frac{a^4}{12}. \text{ Igualando } \frac{a^4}{12} = \frac{2a}{3}$$

obtenemos como solución $a = 2$.

3. a) Sumando a cada fila la primera fila:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^3$$

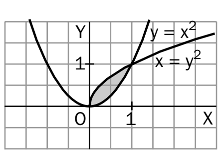


b) $$\text{Área} = \int_{-2}^{-1} \left((x+1)^3 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) dx +$$

$$+ \int_{-1}^{0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - (x+1)^3 \right) dx = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{2} \text{ uc}$$

4. Las funciones se cortan en (1, 1).

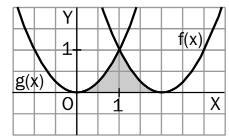
$$V = \int_0^1 \pi x\,dx - \int_0^1 \pi x^4\,dx = \frac{3}{10}\pi \text{ u. cúbicas.}$$



5. Las funciones se cortan en $x = 1$.
El volumen viene dado por:

$$V = [V(f, [0, 1]) - V(g, [0, 1])] +$$
$$+ [V(g, [1, 2]) - V(f, [1, 2])] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \int_0^1 \pi(x-2)^4\,dx =$$



$$= \int_0^1 \pi x^4\,dx + \int_1^2 \pi x^4\,dx -$$

$$- \int_1^2 \pi(x-2)^4\,dx = \frac{31}{5}\pi \text{ u. cúbicas.}$$

6. Los puntos de corte de las funciones f y g son:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} \\ g(x) = ax + a \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+1} = a(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 1 = a^2(x+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1) \cdot (a^2(x+1) - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{a^2} - 1 \end{cases}$$

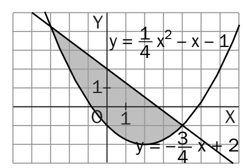
El área del recinto sería:

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{a^2}-1} \left(\sqrt{x+1} - (ax + a)\right) dx = \frac{1}{6a^3} \text{ uc}$$

Por tanto: $\dfrac{1}{6a^3} = 1 \Rightarrow a = \sqrt[3]{\dfrac{1}{6}}$

7. a) $-1 = -\dfrac{3}{4} \cdot 4 + a \Rightarrow a = 2$

b) $$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x^2 - x - 1 \\ y = -\dfrac{3}{4}x + 2 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x - 1 = -\frac{3}{4}x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \;\; y = \dfrac{17}{4} \\ x = \;\;4 \;\; y = -1 \end{cases}$$

Los puntos de corte son $\left(-3, \dfrac{17}{4}\right)$ y (4, −1)

c) $$S = \int_{-3}^{4} \left| \left(-\frac{3}{4}x + 2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - x - 1\right) \right| dx =$$

$$= \int_{-3}^{4} \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 3\right) dx = \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} + 3x\right]_{-3}^{4} =$$

$$= \left(-\frac{16}{3} + 2 + 12\right) - \left(\frac{9}{4} + \frac{9}{8} - 9\right) = \frac{26}{3} + \frac{45}{8} = \frac{343}{24} \text{ uc}$$

8. Al ser un volumen de revolución:

$$V = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \cdot [\operatorname{arctg} x]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{2} \text{ unidades cúbicas}$$

9. $$V = \int_0^{20} (t^2 + 2t + 4)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} + t^2 + 4t\right]_0^{20} =$$

$$= \frac{8\,000}{3} + 400 + 80 \approx 3\,146{,}7 \text{ litros.}$$