MATEMATICAS. BC2 TEMA 12: Integral definida

1. Hallar el valor de c del teorema del valor medio del cálculo integral de $f(x) = 3x^2$ en $[-4, -1]$

2. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

3. Calcular el área limitada por la curva $xy = 36$, el eje OX y las rectas: $x = 6$, $x = 12$

4. Calcular el área del triángulo de vértices A(3, 0), B(6, 3), C(8, 0).

5. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - 4x$ y el eje OX.

6. Hallar el área limitada por la curva $y = \cos x$ y el eje Ox entre pi/2 y 3pi/2.

7. Hallar el área limitada por la recta $y = \dfrac{3x-6}{2}$, el eje de abscisas $x = 0$ y $x = 4$

8. Calcular el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta que pasa por $(-1, 0)$ y $(1, 4)$

9. Hallar el área de la figura limitada por: $y = x^2$, $y = x$, $x = 0$, $x = 2$

10. Hallar el área de la región limitada por $y = \ln x$, $y = 2$ y los ejes coordenados.

11. Hallar el área del recinto plano y limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje OX.

12. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $y^2 = 4x$ e $y = x^2$

13. Calcular el valor de las siguientes integrales definidas:

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(3x^3 - x^2 + x - 1\right)\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\,dx$
6. $\displaystyle\int_2^4 \log x\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$

14. Calcular la derivada de las funciones:

1. $\displaystyle F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt$
2. $\displaystyle F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2}\,dt$

15. ¿Es aplicable el teorema del valor medio del cálculo integral en [0,1] a $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$?

16. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 4x - x^2$ y el eje OX.

17. Hallar el área de la región del plano encerrada por la curva $y = \ln x$ entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa $x = e$.

18. Hallar el área limitada por la recta $x + y = 10$, el eje OX y las ordenadas de $x = 2$ y $x = 8$

19. Calcular el área limitada por la curva $y = 6x^2 - 3x^3$ y el eje de abscisas.

20. Calcular el área de las regiones del plano limitada por la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.

21. Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 6$ y la recta $y = 2x$.

22. Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$

23. Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $3y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

24. Calcula el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$

25. Hallar el área de de la región limitada por las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$

SOLUCIONES

Ejercicio 1:

Como la función es continua en el intervalo [−4, −1], se puede aplicar el **teorema de la media**.

$$\int_{-4}^{-1} 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_{-4}^{-1} = -1+64 = 63 \qquad 63 = \left[-1-(-4)\right]\cdot f(c)\,;\ f(c) = 21 \qquad 3c^2 = 21 \qquad c = -\sqrt{7}$$

La solución positiva no es válida porque no pertenece al intervalo.

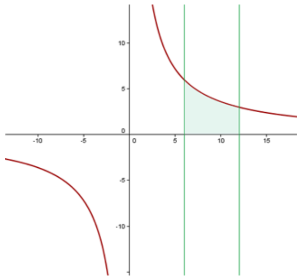
Ejercicio 2:

En primer lugar hallamos los puntos de corte con el eje OX para representar la curva y conocer los límites de integración.

$$0 = 9 - x^2 \qquad x = 3 \qquad x = -3$$

Como la parábola es simétrica respecto al eje OY, el área será igual al doble del área comprendida entre x = 0 y x = 3.

$$A = \int_{-3}^{3}\left(9 - x^2\right)dx = 2\int_{0}^{3}\left(9 - x^2\right)dx = 2\left[9x - \frac{x^3}{3}\right] = 36u^2$$



Ejercicio 3:

$$A = \int_{6}^{12}\frac{36}{x}\,dx = \left[36\ln x\right]_{6}^{12} = 36\ln 2u^2$$

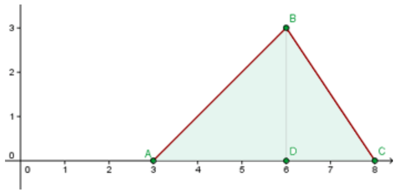
Ejercicio 4:

Ecuación de la recta que pasa por AB:

$$\frac{x-3}{6-3} = \frac{y-0}{3-0} \qquad y = x - 3$$

Ecuación de la recta que pasa por BC:

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-0}{3-0} \qquad y = -\frac{3}{2}(x-8)$$

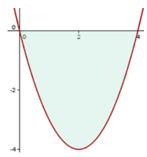


$$A = \int_{3}^{6}(x-3)\,dx + \int_{6}^{8}\left[-\frac{3}{2}(x-8)\right]dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{3}^{6} + \left[-\frac{3}{4}x^2 + 12x\right]_{6}^{8} = \left(18 - 18 - \frac{9}{2} + 9\right) + (-48 + 96 + 27 - 72) = \frac{15}{2}u^2$$

Ejercicio 5:

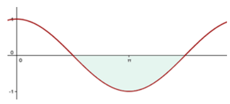
$$0 = x^2 - 4x \qquad x = 0 \qquad x = 4$$

$$A = \int_{0}^{4}\left(x^2 - 4x\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_{0}^{4} = -\frac{32}{3} \qquad |A| = \frac{32}{3}u^2$$



Ejercicio 6:

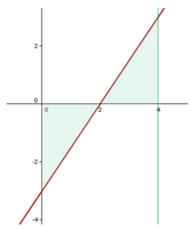
$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx = \left[\operatorname{sen} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1 - 1 = -2\,; \quad |A| = 2u^2$$



Ejercicio 7:

$$A_1 = \int_{0}^{2}\left(\frac{3x-6}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_{0}^{2} = \frac{1}{2}(6-12) = -3$$

$$A_2 = \int_{2}^{4}\left(\frac{3x-6}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_{2}^{4} = \frac{1}{2}\left[(24-24)-(6-12)\right] = 3\,; \quad A = |A_1| + A_2 = |-3| + 3 = 6u^2$$



Ejercicio 8:

$$\frac{x+1}{1+1} = \frac{y}{4} \qquad 4(x+1) = 2y \qquad y = 2x+2 \qquad \begin{cases} y = x^2+2 \\ y = 2x+2 \end{cases} \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

$$\int_{0}^{2}\left(2x + 2 - x^2 - 2\right)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}u^2$$

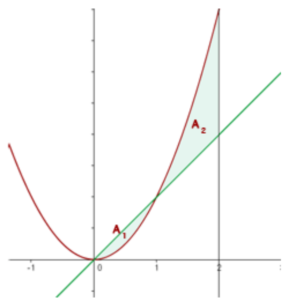
Ejercicio 9:

Puntos de corte de la parábola y la recta y = x.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad x^2 = x \qquad x = 0 \quad x = 1$$

De x = 0 a x = 1, la recta queda por encima de la parábola.

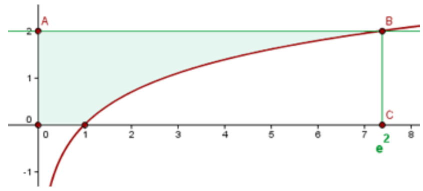
$$A_1 = \int_{0}^{1}\left(x - x^2\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6}u^2$$



De x = 1 a x = 2, la recta queda por debajo de la parábola.

$$A_2 = \int_1^2 \left(x^2 - x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}u^2 \qquad A = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1\,u^2$$

Ejercicio 10:



Calculamos el punto de corte de la curva y la recta y = 2.

$$\ln x = 2 \qquad e^2 = x$$

El área es igual a la del rectángulo OABC menos bajo la curva y = ln x.

El área de rectángulo es base por altura.

$$A_1 = e^2 \cdot 2 = 2e^2\ u^2$$

El área bajo la curva y = ln x es:

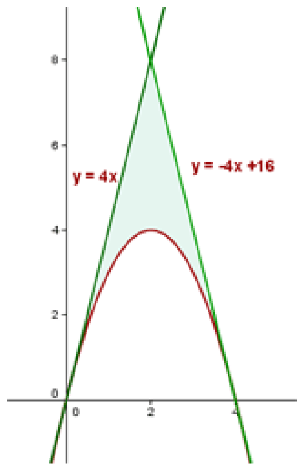
$$A_2 = \int_1^{e^2} \ln x\, dx$$, por partes queda: $$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

$$A_2 = \int_1^{e^2} \ln x\, dx = \left[x\ln x - x\right]_1^{e^2} = 2e^2 - e^2 + 1 = \left(e^2+1\right)u^2 \qquad A = 2e^2 - e^2 - 1 = \left(e^2-1\right)u^2$$

Ejercicio 11:

Puntos de intersección:

$$4x - x^2 = 0 \qquad x(4-x) = 0 \qquad (0,0) \qquad (4,0)$$



Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (0, 0):

$$y' = 4 - 2x \qquad m = f'(0) = 4$$

$$y - 0 = 4(x-0) \qquad y = 4x$$

Ecuación de la tangente a la parábola en el punto (4, 0):

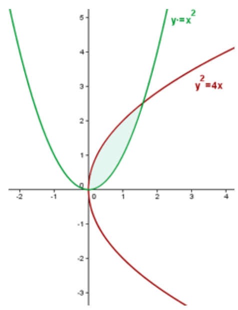
$$y' = 4 - 2x \qquad m = f'(4) = -4$$

$$y - 0 = 4(x-4) \qquad y = -4x + 16$$

$$A = \int_0^2 \left[4x - \left(4x - x^2\right)\right] dx + \int_2^4 \left[\left(-4x+16\right) - \left(4x - x^2\right)\right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 16x\right]_2^4 = \frac{16}{3}u^2$$

Ejercicio 12:



$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x^2 \end{cases} \qquad \left(x^2\right)^2 = 4x \qquad x^4 - 4x = 0 \qquad x\left(x^3 - 4\right) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = \sqrt[3]{4}$$

$$A = \int_0^{\sqrt[3]{4}} \left(2\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{4}} = \frac{4}{3}u^2$$

Ejercicio 13:

1.- $$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2-1\right)\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln 8 - \ln 3\right) = \ln\sqrt{\frac{8}{3}}$$

2.- $$\int_{-1}^1 \left(3x^3 - x^2 + x - 1\right) dx = \int_{-1}^1 \left(3x^3 - x^2 + x - 1\right) dx = \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{8}{3}$$

3.- $$\int_1^e \frac{dx}{x} = \int_1^e \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

4.- $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

5.- $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\left(1 - \cos^2 x\right)\cos^4 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^4 x \operatorname{sen} x - \cos^6 x \operatorname{sen} x\right) dx = \left[-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$$

6.- $\int_2^4 \log x \, dx$

$u = \log x \xrightarrow{derivar} u' = \frac{1}{x}\log e$

$v' = 1 \xrightarrow{integrar} v = x$

$\int_2^4 \log x \, dx = [x \log x]_2^4 - \int_2^4 \log e \, dx = [x\log x - x \log e]_2^4 = = 4\log 2^2 - 4\log e - 2\log 2 + 2\log e =$

$= 8\log 2 - 4\log e - 2\log 2 + 2\log e = 6\log 2 - 2\log e$

7.- $\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x} \, dx \qquad x = t^2 \quad dx = 2t\,dt$

Hallamos los nuevos límites de integración.

$x = 0 \qquad t^2 = 0 \qquad t = 0$

$x = \pi^2 \qquad t^2 = \pi^2 \qquad t = \pi$

$\int \operatorname{sen} t \, 2t\,dt = 2\int t \operatorname{sen} t \, dt$

Integramos por partes.

$u = t \xrightarrow{derivar} u' = 1$

$v' = \operatorname{sen} t \xrightarrow{integrar} v = -\cos t$

$2\int t \operatorname{sen} t \, dt = 2\left(-t\cos t + \int \cos t \, dt\right) = 2(-t\cos t + \operatorname{sen} t) + C$

$2\int_0^{\pi} t \operatorname{sen} t \, dt = 2[-t\cos t + \operatorname{sen} t]_0^{\pi} = 2\pi$

También se puede hacer sin transformar los límites de integración y volviendo a la variable inicial.

$t = \sqrt{x}$

$\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx = 2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \operatorname{sen}\sqrt{x}\right) + C \;; \quad \int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx = 2\left[-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \operatorname{sen}\sqrt{x}\right]_0^{\pi^2} = 2\pi$

Ejercicio 14:

1.- $F(x) = \int_1^{x^3} \frac{1}{1+t^2}\,dt \qquad t = x^3 \quad dt = 3x^2 \qquad F'(x) = \frac{1}{1+x^6}\cdot 3x^2$

2.- $F(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2}\,dt \qquad t = x^2 \quad dt = 2x \qquad F'(x) = e^{x^4}\cdot 2x$

Ejercicio 15:

Como la función es continua en [0, 1], se puede aplicar el **teorema de la media**.

$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$

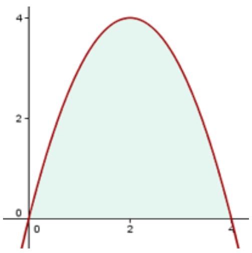
$f(c) = (1-0)\left(\sqrt{2}-1\right) \qquad f(c) = \sqrt{2} - 1$

$\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = \sqrt{2} - 1 \qquad c = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

Ejercicio 16:

En primer lugar hallamos los puntos de corte con el eje OX para representar la curva y conocer los límites de integración.

$0 = 4x - x^2 \qquad x = 0 \qquad x = 4$



En segundo lugar se calcula la integral:

$A = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{3} u^2$

Ejercicio 17:

En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje de abscisas.

$\ln x = 0 \qquad e^0 = 1 \qquad (1,0)$

$$\int_1^e \ln x \, dx$$

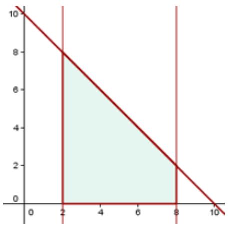
$$v = \ln x \xrightarrow{derivar} v' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{integrar} v = x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C \;;\quad \int_1^e \ln x \, dx = \left[x(\ln x - 1)\right]_1^e = 0 + 1 = 1u^2$$

Ejercicio 18:

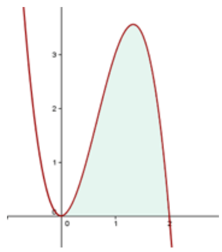
$$A = \int_2^8 (10 - x)\, dx = \left[10x - \frac{x^2}{2}\right]_2^8 = 30\ u^2$$



Ejercicio 19:

$6x^2 - 3x^3 = 0 \qquad 3x^2(2 - x) = 0 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

$$A = \int_0^2 \left(6x^2 - 3x^3\right) dx = \left[2x^3 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^2 = 16 - 12 = 4u^2$$



Ejercicio 20:

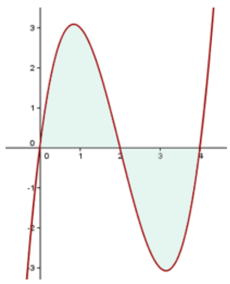
$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \qquad x\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0$

$x = 0 \qquad x = 2 \qquad x = 4$

$$A = \int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) dx + \left|\int_2^4 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) dx\right|$$

El área, por razones de simetría, se puede escribir:

$$A = 2\int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 8u^2$$



Ejercicio 21:

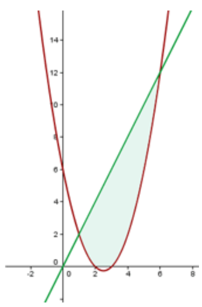
En primer lugar hallamos los puntos de corte de las dos funciones para conocer los límites de integración.

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = 2x \end{cases} \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = 6$$

De x = 1 a x = 6, la recta queda por encima de la parábola.

$$A = \int_1^6 \left(2x - x^2 + 5x - 6\right) dx = \int_1^6 \left(-x^2 + 7x - 6\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x\right]_1^6 =$$

$$= \left(-\frac{6^3}{3} + \frac{7\cdot 6^2}{2} - 36\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 6\right) = \frac{125}{6}u^2$$

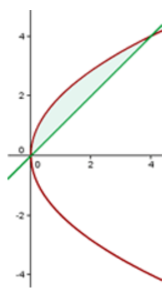


Ejercicio 22:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x \end{cases} \qquad y^2 = 4y \qquad (0,0) \quad (4,0)$$

De x = 0 a x = 4, la parábola queda por encima de la recta.

$$A = \int_0^4 \sqrt{4x}\, dx - \int_0^4 x\, dx = \int_0^4 \left(\sqrt{4x} - x\right) dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{8}{3}u^2$$



Ejercicio 23:

En primer lugar representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

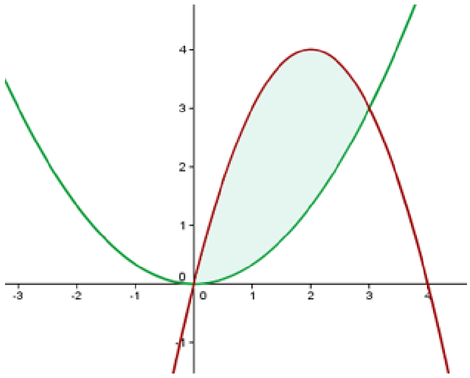
$$y=\frac{x^2}{3} \qquad x_v=0 \qquad y_v=0 \qquad V(0,0)$$

$$y=-x^2+4x \qquad x_v=-\frac{4}{-2}=2 \qquad y_v=4 \qquad V(2,4)$$

$$-x^2+4x=0 \qquad x_1=0 \qquad x_2=4$$

Hallamos también los puntos de corte de las funciones, que nos darán los límites de integración.

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{3} \\ y=-x^2+4x \end{cases} \qquad (0,0) \qquad (3,3)$$



$$A=\int_0^3\left(-x^2+4x-\frac{x^2}{3}\right)dx=\int_0^3\left(-\frac{4}{3}x^2+4x\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{4}{9}x^3+2x^2\right]_0^3=-12+18=6u^2$$

Ejercicio 24:

Representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

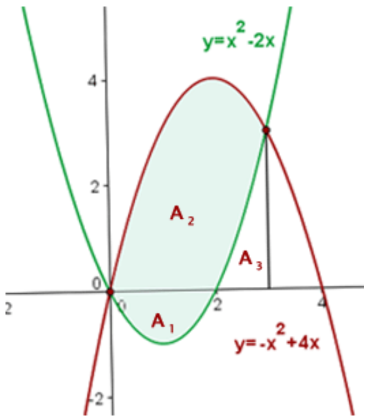
$$x_v=\frac{2}{2}=1 \qquad y_v=1^2-2\cdot 1=-1 \qquad V(1,-1)$$

$$0=x^2-2x \qquad 0=x(x-2) \qquad (0,0) \quad (2,0)$$

$$x_v=\frac{-4}{-2}=2 \qquad y_v=-2^2+4\cdot 2=4 \qquad V(2,-4)$$

$$0=-x^2+4x \qquad 0=x(-x+4) \qquad (0,0) \quad (4,0)$$

$$\begin{cases} y=x^2-2x \\ y=-x^2+4x \end{cases} \qquad x^2-2x=-x^2+4x \qquad (0,0) \quad (3,3)$$



$$A_1=\int_0^2\left(x^2-2x\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2=-\frac{4}{3} \qquad |A_1|=\frac{4}{3}u^2$$

$$A_2=\int_0^3\left(-x^2+4x\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^3=9 \qquad A_2=9u^2$$

$$A_3=\int_2^3\left(x^2-2x\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3=\frac{4}{3} \qquad A_3=\frac{4}{3}u^2$$

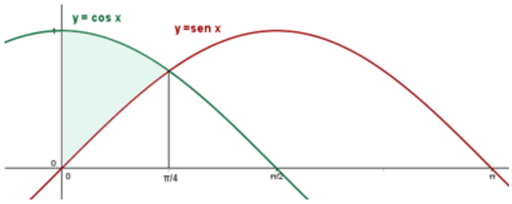
$$A=|A_1|+A_2-A_3 \qquad A=\frac{4}{3}+9-\frac{4}{3}=9u^2$$

Ejercicio 25:

En primer lugar hallamos el punto de intersección de las funciones:

$$\begin{cases} y=\operatorname{sen} x \\ y=\cos x \end{cases} \qquad \operatorname{sen} x=\cos x \qquad x=\frac{\pi}{4}$$

La gráfica del coseno queda por encima de la gráfica del seno en el intervalo de integración.



$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\operatorname{sen} x)\,dx=\left[\operatorname{sen} x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\sqrt{2}-1\right)u^2$$