17 y 18 Integrales indefinidas. Métodos de integración

1. Calcula la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ que cumple la condición de que su gráfica pasa por el punto (0, 3).

2. Halla la ecuación de una curva $y = f(x)$ sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que la pendiente de la recta tangente en el punto genérico de abscisa x es $m(x) = 3x^2 + 1$.

3. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int e^x \cdot (e^x + 1)^4\, dx$ b) $\displaystyle\int x \cdot e^{x^2 + 2}\, dx$

4. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{L^2 x}{x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot Lx}\, dx$

5. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$ b) $\displaystyle\int x^2 \cdot 2^x\, dx$

6. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{2x + 5}{x^2 + 1}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{9 + x^2}\, dx$

7. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 3}{x^2 + x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 - x - 1}\, dx$

8. Determina todas las primitivas de la función $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}$

9. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int e^x \cdot \sqrt{1 - e^{2x}}\, dx$ b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x\, dx$

SOLUCIONES

Nota: Siguiendo el criterio del libro, la constante C se sobrentiende, por lo que solo se escribe cuando se pide su valor.

1. $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

Como $F(0) = 3 \Rightarrow C = 2$ y $F(x) = \sqrt{x^2+1} + 2$

2. $f(x) = \int m(x)\,dx = \int (3x^2+1)\,dx = x^3 + x + C$

$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ y $f(x) = x^3 + x$

3. a) Cambio de variable: $t = e^x + 1$; $dt = e^x\,dx$

$\int t^4\,dt = \frac{t^5}{5} = \frac{1}{5}(e^x+1)^5$

b) Cambio de variable: $t = x^2 + 2$; $dt = 2x\,dx$

$\int \frac{1}{2} e^t\,dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{x^2+2}$

4. a) Si $t = Lx$; $dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} = \frac{1}{3} L^3 x$

b) Si $t = Lx$; $dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{t}\,dt = Lt = L(Lx)$

5. a) Integración por partes:

$u = x,\ dv = \text{sen}\,x \cdot dx \Rightarrow du = dx,\ v = -\cos x$

$I = -x\cos x - \int (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \text{sen}\,x$

b) $u = x^2,\ dv = 2^x\,dx \Rightarrow du = 2x\,dx,\ v = \frac{2^x}{L2}$

$I = \frac{x^2 \cdot 2^x}{L2} - \int 2x \cdot \frac{2^x}{L2}\,dx = \frac{x^2\cdot 2^x}{L2} - \frac{2}{L2}\int x \cdot 2^x\,dx$

Integrando de nuevo:

$u = x,\ dv = 2^x\,dx \Rightarrow du = dx,\ v = \frac{2^x}{L2}$

$I = \frac{x^2 \cdot 2^x}{L2} - \frac{2}{L2}\left(\frac{x \cdot 2^x}{L2} - \int \frac{2^x}{L\,2}\,dx\right) =$

$= \frac{x^2 \cdot 2^x}{L2} - \frac{x \cdot 2^{x+1}}{(L2)^2} + \frac{2^{x+1}}{(L2)^3}$

6. a) $I = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{5}{x^2+1}\,dx =$

$= L\,|x^2+1| + 5\,\text{arctg}\,x$

b) $I = \int \frac{x}{9+x^2}\,dx + \int \frac{1}{9+x^2}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{9+x^2}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx =$

$= \frac{1}{2} L\,|9+x^2| + \frac{1}{3}\,\text{arctg}\,\frac{x}{3}$

7. a) Haciendo la división entera:

$I = \int \left(x^2 - 1 + \frac{3}{x^2+x}\right) dx$

Descomponiendo en fracciones simples:

$\frac{3}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$

es decir, $3 = A(x+1) + Bx$

Dando valores a x se obtiene $A = 3$ y $B = -3$

$\Rightarrow I = \int \left(x^2 - 1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x+1}\right) dx =$

$= \frac{x^3}{3} - x + 3\,L\,|x| - 3\,L\,|x+1|$

b) $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$

Descomponiendo en fracciones simples:

$I = -\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$

$= -\frac{3}{4} L\,|x-1| + \frac{7}{4} L\,|x+1| - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x+1}$

8. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = (x^2+4)(x-3)$

Descomponiendo en fracciones simples:

$I = \frac{6}{13}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{6}{13}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \frac{5}{13}\int \frac{dx}{x^2+4} =$

$= \frac{6}{13} L\,|x-3| + \frac{3}{13} L\,|x^2+4| - \frac{5}{26}\,\text{arctg}\frac{x}{2}$

9. a) Cambio de variable $e^x = \text{sen}\,t$, $e^x dx = \cos t\,dx$

$I = \int \sqrt{1 - \text{sen}^2\,t} \cdot \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$

$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t \cdot \cos t$

Deshaciendo el cambio de variable:

$I = \frac{1}{2}\,\text{arcsen}\,e^x + \frac{1}{2} e^x \sqrt{1 - e^{2x}}$

b) $I = \int \frac{\cos(2x - x) - \cos(2x + x)}{2}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int \cos x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 3x\,dx =$

$= \frac{1}{2}\,\text{sen}\,x - \frac{1}{6}\,\text{sen}\,3x$

17 y 18 Integrales indefinidas. Métodos de integración

1. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int x^2 \cdot \cos^2 x \, dx$

2. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int x \cdot \operatorname{arcsen} x \, dx$

3. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$

4. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int \cos^5 x \, dx$

5. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int x^n \cdot \mathrm{L}x \, dx$

6. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int x^3 \cdot 3^x \, dx$

7. Utiliza el cambio de variable $x = 1 - t^6$ para obtener todas las primitivas de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x} - \sqrt[3]{1 - x}}$$

8. Busca un cambio de variable adecuado y calcula la integral indefinida: $\int 3^{\sqrt{2x + 1}} \, dx$

9. Halla todas las primitivas de la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$ empleando el siguiente cambio de variable: $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$

10. Para integrar funciones de la forma $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_1 \operatorname{sen} x + b_1 \cos x}{a_2 \operatorname{sen} x + b_2 \cos x}$ deben encontrarse las constantes A y B que cumplen la condición $f(x) = Ag(x) + Bg'(x)$. Así se obtiene:

$$\int \frac{a_1 \operatorname{sen} x + b_1 \cos x}{a_2 \operatorname{sen} x + b_2 \cos x} dx = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \left(A + B \frac{g(x)}{g'(x)} \right) dx = Ax + B\mathrm{L}\,|g(x)| + C =$$

$$= Ax + B\mathrm{L}\,|a_2 \operatorname{sen} x + b_2 \cos x| + C$$

Aplica el procedimiento anterior para calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + 2 \cos x} dx$$

SOLUCIONES

Nota: Siguiendo el criterio del libro, la constante C se sobrentiende, por lo que solo se escribe cuando se pide su valor.

1. $u = x^2,\ dv = \cos^2 x\ dx \Rightarrow\ du = 2x\ dx,$

$v = \int \cos^2 x\ dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\ dx =$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x,\ I = x^2\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right] -$

$- \int 2x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right) dx = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{4} -$

$- \int x^2\ dx - \frac{1}{2}\int x \operatorname{sen} 2x\ dx$

calculando por partes la última integral, se obtiene:

$I = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2 \operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x \cos 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{8}$

2. $u = \operatorname{arcsen} x,\ dv = x dv \Rightarrow\ du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},\ v = \frac{x^2}{2}$

$I = \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx$; hacemos un cambio de variable para calcular la nueva integral J: $x = \operatorname{sen} t,\ dx = \cos t \cdot dt$

$J = \int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t}\cos t\ dt = \int \operatorname{sen}^2 t\ dt = \int \frac{1 - \cos 2t}{2}\ dt =$

$= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$, y por tanto:

$I = \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2 \operatorname{arcsen} x)$

3. $I = \int (\operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2\ dx = \int \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)^2 dx =$

$= \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x\ dx = \frac{1}{4}\int \frac{1 - \cos 4x}{2}\ dx =$

$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x$

4. $I = \int \cos x \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2\ dx,\ t = \operatorname{sen} x,\ dt = \cos x\ dx$

$I = \int (1 - t^2)^2\ dt = \int (1 - 2t^2 + t^4)\ dt =$

$= t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$, deshaciendo el cambio

$I = \operatorname{sen} x - \frac{2 \operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5}$

5. $u = Lx,\ dv = x^n\ dx \Rightarrow\ du = \frac{1}{x}\ dx,\ v = \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$

$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}Lx - \int \frac{x^n}{n+1}\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}Lx - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$

6. Integrando por partes tres veces con el cambio $u = x^p\ (p = 3, 2, 1),\ dv = 3^x$, se obtiene:

$I = 3^x\left[\frac{x^3}{L3} - \frac{3x^2}{(L3)^2} + \frac{6x}{(L3)^3} - \frac{6}{(L3)^4}\right]$

7. $x = 1 - t^6 \Rightarrow\ dx = -6t^5\ dt,\ F(x) = \int f(x)\ dx =$

$= \int \frac{1}{\sqrt{t^6} - \sqrt[3]{t^6}} \cdot (-6t^5)\ dt = -6\int \frac{t^5}{t^3 - t^2}\ dt =$

$= -6\int \frac{t^3}{t - 1}\ dt$; efectuando la división entera:

$F(x) = -6\int \left(t^2 + t^2 + 1 + \frac{1}{t - 1}\right) dt =$

$= -6\left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + L|t - 1|\right]$

$F(x) = -2\sqrt{1 - x} - 3\sqrt[3]{1 - x} - 6\sqrt[6]{1 - x} -$

$-6\ L|\sqrt[6]{1 - x} - 1|$

8. Haciendo $t = \sqrt{2x + 1},\ dt = \frac{2dx}{2\sqrt{2x + 1}} = \frac{1}{t}dx$

$I = \int t \cdot 3^t\ dt \Rightarrow\ du = dt,\ v = \frac{3^t}{L3}$

$I = t\frac{3^t}{L3} - \frac{3^t}{(L3)^2}$. Deshaciendo el cambio:

$I = \sqrt{2x + 1}\ \frac{3^{\sqrt{2x + 1}}}{L3} - \frac{3^{\sqrt{2x + 1}}}{(L3)^2}$

9. Empleando las identidades trigonométricas:

$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ y $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ con

$\alpha = \frac{x}{2},\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ dx = \frac{2}{1 + t^2}\ dt;$

$F(x) = \int f(x)\ dx = \int \frac{1}{1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2}{1 + t^2}\ dt =$

$= \int dt = t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

10. Buscamos A y B que verifiquen: $\operatorname{sen} x - \cos x =$ $= A(\operatorname{sen} x + 2\cos x) + B(\cos x - 2\operatorname{sen} x)$ $= (A - 2B)\operatorname{sen} x + (2A + B)\cos x$; debe ser $A - 2B = 1,\ 2A + B = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{5},\ B = -\frac{3}{5}$. Así: $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + 2\cos x}\ dx =$

$= -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}L|\operatorname{sen} x + 2\cos x|$