1.- Factoriza los siguientes polinomios:

1. $x^3 + x^2$ **2.** $2x^4 + 4x^2$ **3.** $x^2 - 4$ **4.** $x^4 - 16$

5. $9 + 6x + x^2$ **6.** $x^2 - x - 6$ **7.** $x^4 - 10x^2 + 9$

8. $x^4 - 2x^2 - 3$ **9.** $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$ **10.** $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$

11. $x^3 - x^2 - 4$ **12.** $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ **13.** $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

14. $9x^4 - 4x^2$ **15.** $2x^5 + 20x^3 + 100x$ **16.** $3x^5 - 18x^3 + 27x$

17. $2x^3 - 50x$ **18.** $2x^5 - 32x$ **19.** $2x^2 + x - 28$ **20.** $25x^2 - 1$

21. $36x^6 - 49$ **22.** $x^2 - 2x + 1$ **23.** $x^2 - 6x + 9$ **24.** $x^2 - 20x + 100$

25. $x^2+10x+25$ **26.** $x^2 + 14x + 49$ **27.** $x^3 - 4x^2 + 4x$ **28.** $3x^7 - 27x$

29. $x^2 - 11x + 30$ **30.** $3x^2 + 10x + 3$ **31.** $2x^2 - x - 1$

2.- Simplificar las fracciones algebraicas:

1. $\frac{x^2-3x}{x^2+3x} =$ **2.** $\frac{x^2-3x}{3-x} =$ **3.** $\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1} =$

4. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} =$ **5.** $\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-2} =$ **6.** $\frac{x^3-19x-30}{x^3-3x^2-10x} =$

3.- Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

1. $\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} =$ **2.** $\frac{x+2}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} =$

3. $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} =$ **4.** $\frac{9-6x+x^2}{9-x^2} \cdot \frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x} =$

5. $\frac{x+2}{x^2+4x+4} : \frac{x^2-4}{x^3+8} =$ **6.** $\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+2x-3} : \frac{4x-2x^2}{x^3-2x^2+x} =$

7. $\left(x + \frac{x}{x-1}\right) \cdot \left(x - \frac{x}{x-1}\right) =$ **8.** $\left(x + \frac{x}{x-1}\right) : \left(x - \frac{x}{x-1}\right) =$ **9.** $\frac{x}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}} =$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

1. $x^3 + x^2 = x^2\,(x + 1)$ La raíces son: x = 0 y x = − 1

2. $2x^4 + 4x^2 = 2x^2\,(x^2 + 2)$

Sólo tiene una raíz x = 0 ; ya que el polinomio, $x^2 + 2$, no tiene ningún valor que lo anule; debido a que al estar la x al cuadrado siempre dará un número positivo, por tanto es irreducible.

3. $x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$ Las raíces son X = − 2 y X = 2

4. $x^4 - 16 = (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$ Las raíces son x = −2 y x = 2

$$9 + 6x + x^2 = (3 + x)^2$$

↓ ↑ ↓

5. $3^2 \quad 2 \cdot 3 \cdot x \quad x^2$ La raíz es x = −3 .

6. $x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$$

Las raíces son x = 3 y x = −2 .

7. $x^4 - 10x^2 + 9$ $\quad x^2 = t$ $\quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ $\quad t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ \searrow t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ $\quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $\quad x^2 = 1$ $\quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$

8. $x^4 - 2x^2 - 3$ $\quad x^2 = t$ $\quad t^2 - 2t - 3 = 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \nearrow t_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow t_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$x^2 = 3$ $\quad x = \pm\sqrt{3}$ $\quad x^2 = -1$ $\quad x = \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$

$x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 + 1) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

9. $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

1 Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.

2 Aplicando el teorema del resto sabremos para que valores la división es exacta.

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 - 8 \cdot 1^2 - 1 + 6 = 2 + 1 - 8 - 1 + 6 = 0$

3 Dividimos por Ruffini.

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

4 Por ser la división exacta, D = d · c $(x - 1) \cdot (2x^3 + 3x^2 - 5x - 6)$ Una raíz es x = 1.

5 Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor.

6 Volvemos a probar por 1 porque el primer factor podría estar elevado al cuadrado.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$ $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = -2 + 3 + 5 - 6 = 0$

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (2x^2 + x - 6)$

Otra raíz es x = -1.

8 El tercer factor lo podemos encontrar aplicando la ecuación de 2º grado o tal como venimos haciéndolo, aunque tiene el inconveniente de que sólo podemos encontrar raíces enteras.

9 El 1 lo descartamos y seguimos probando por − 1.

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + (-1) - 6 \neq 0$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 \neq 0$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 = 2 \cdot 4 - 2 - 6 = 0$

	2	1	−6
−2		−4	6
	2	−3	0

$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 3)$

10 Sacamos factor común 2 en último binomio. $2x - 3 = 2(x - 3/2)$

11 La factorización del polinomio queda:

$2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3/2)$

12 Las raíces son : x = 1, x = − 1, x = −2 y x = 3/2

10. $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$ $\qquad$ $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 3 = 0$

	2	-7	8	-3
1		2	-5	3
	2	-5	3	0

$(x - 1) \cdot (2x^2 - 5x + 3)$

	2	-5	3
1		2	-3
	2	-3	0

$P(1) = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$

$(x - 1)^2 \cdot (2x - 3) = 2\,(x - 3/2) \cdot (x - 1)^2$ $\qquad$ Las raíces son: $x = 3/2$ y $x = 1$

11. $x^3 - x^2 - 4$ $\qquad$ $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ $\qquad$ $P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \neq 0$ $\qquad$ $P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 4 \neq 0$

	1	-1	0	-4
2		2	2	4
	1	1	2	0

$P(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$ $\qquad$ $(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$

$x^2 + x + 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$

Raíz: $x = 2$.

12. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ $\qquad$ $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ $\qquad$ $P(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 12 \neq 0$

$P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 12 \neq 0$ $\qquad$ $P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = 8 + 12 - 8 - 12 = 0$

	1	3	-4	-12
2		2	10	12
	1	5	6	0

$(x - 2) \cdot (x^2 + 5x + 6)$ $\qquad$ $x^2 + 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

$(x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

Las raíces son : $x = 2$, $x = -2$, $x = -3$.

13. $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$ $\{\pm 1, \pm 2\}$ $P(1) = 6 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2 \neq 0$

$P(-1) = 6 \cdot (-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 2 \neq 0$ $P(2) = 6 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 2 \neq 0$

$P(-2) = 6 \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) + 2 = -48 + 28 + 18 + 2 = 0$

	6	7	-9	2
-2		−12	10	−2
	6	−5	1	0

$(x+2) \cdot (6x^2 - 5x + 1)$ $6x^2 - 5x + 1 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \searrow x_2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$6 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1/2) \cdot (x - 1/3)$

Raíces: $x = -2$, $x = 1/2$ y $x = 1/3$

14. $9x^4 - 4x^2 = x^2 \cdot (9x^2 - 4) = x^2 \cdot (3x + 2) \cdot (3x - 2)$

15. $2x^5 + 20x^3 + 100x = x \cdot (x^4 + 20x^2 + 100) = x \cdot (x^2 + 10)^2$

16. $3x^5 - 18x^3 + 27x = 3x \cdot (x^4 - 6x^2 + 9) = 3x \cdot (x^2 - 3)^2$

17. $2x^3 - 50x = 2x \cdot (x^2 - 25) = 2x \cdot (x + 5) \cdot (x - 5)$

18. $2x^5 - 32x = 2x \cdot (x^4 - 16) = 2x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4) = 2x \cdot (x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

19. $2x^2 + x - 28$; $2x^2 + x - 28 = 0$ $2x^2 + x - 28 = 2(x + 4) \cdot (x - 7/2)$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 28}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 224}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{-1 \pm 15}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \\ \searrow x_2 = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

20. $25x^2 - 1 = (5x + 1) \cdot (5x - 1)$

21. $36x^6 - 49 = (6x^3 + 7) \cdot (6x^3 - 7)$

22. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

23. $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

24. $x^2 - 20x + 100 = (x - 10)^2$

25. $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

26. $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$

27. $x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x^2 - 4x + 4) = x \cdot (x-2)^2$

28. $3x^7 - 27x = 3x \cdot (x^6 - 9) = 3x \cdot (x^3 + 3) \cdot (x^3 - 3)$

29. $x^2 - 11x + 30 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 11x + 30 = (x-6) \cdot (x-5)$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 30}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{121 - 120}}{2} = \frac{11 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{12}{2} = 6 \\ \searrow x_2 = \dfrac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

30. $3x^2 + 10x + 3 = 0$ $\qquad$ $3x^2 + 10x + 3 = 3\,(x-3) \cdot (x - 1/3)$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\ 3 \cdot 3}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{5} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{18}{6} = 3 \\ \searrow x_2 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

31. $2x^2 - x - 1 = 0$ $\qquad$ $2x^2 - x - 1 = 2\,(x-1) \cdot (x + 1/2)$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \dfrac{4}{4} = 1 \\ \searrow x_2 = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ejercicio nº 2.-

1. $\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x} = \dfrac{x \cdot (x-3)}{x \cdot (x+3)} = \dfrac{(x-3)}{(x+3)}$

2. $\dfrac{x^2 - 3x}{3 - x} = \dfrac{x(x-3)}{3-x} = \dfrac{-x(x-3)}{-3+x} = -x$

3. $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \dfrac{(x-1) \cdot (x+2)}{(x-1) \cdot (x^2 - 1)} = \dfrac{(x+2)}{(x^2-1)}$

4. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = \dfrac{(x-2) \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (x-4)} = \dfrac{(x-2)}{(x-4)}$

5. $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2} = \dfrac{(x+1) \cdot (x-3)}{(x-2) \cdot (x+1)} = \dfrac{(x-3)}{(x-2)}$

6. $\dfrac{x^3 - 19x - 30}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \dfrac{(x+2) \cdot (x+3) \cdot (x-5)}{x \cdot (x+2) \cdot (x-5)} = \dfrac{x+3}{x}$

Ejercicio nº 3.-

1. $\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}=$; $x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$ m.c.m.$(x+1,\ x^2-1,\ x-1)=(x+1)\cdot(x-1)$

$$=\frac{x-1+2x-(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}==\frac{x-1+2x-x-1}{(x+1)\cdot(x-1)}==\frac{2x-2}{(x-1)\cdot(x-1)}==\frac{2\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}==\frac{2}{(x+1)}$$

2. $\frac{x+2}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}=$; $x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$ m.c.m.$(x^3-1,\ x-1)=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$

$$=\frac{x+2-(x^2+x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}==\frac{x+2-x^2-x-1}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}==\frac{-(x^2-1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}==\frac{-(x+1)}{x^2+x+1}$$

3. $\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}==\frac{(x^2-2x)\cdot(x^2+4x+4)}{(x^2-5x+6)\cdot(x^2-4)}=$

$$=\frac{x(x-2)\cdot(x+2)^2}{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}==\frac{x(x+2)}{(x-2)\cdot(x-3)}$$

4. $\frac{9-6x+x^2}{9-x^2}\cdot\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}==\frac{(9-6x+x^2)\cdot(x^2-5x+6)}{(9-x^2)\cdot(3x^2-9x)}=$

$$=\frac{(3-x)^2\cdot(x-3)\cdot(x-2)}{(3+x)\cdot(3-x)\cdot3x(x-3)}==\frac{(3-x)\cdot(x-2)}{3x\cdot(3+x)}$$

5. $\frac{x+2}{x^2+4x+4}:\frac{x^2-4}{x^3+8}==\frac{(x+2)\cdot(x^3+8)}{(x^2+4x+4)\cdot(x^2-4)}=$

$$=\frac{(x+2)\cdot(x+2)\cdot(x^2-2x+4)}{(x+2)^2\cdot(x+2)\cdot(x-2)}==\frac{x^2-2x+4}{x^2-4}$$

6. $\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+2x-3}:\frac{4x-2x^2}{x^3-2x^2+x}==\frac{(x^3+3x^2-4x-12)\cdot(x^3-2x^2+x)}{(x^2+2x-3)\cdot(4x-2x^2)}=$

$$=\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot x\cdot(x-1)^2}{(x+3)\cdot(x-1)\cdot2x\cdot(2-x)}==\frac{-(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)}{2\cdot(-2+x)}==-\frac{(x+2)\cdot(x-1)}{2}$$

7. $$\left(x+\frac{x}{x-1}\right)\cdot\left(x-\frac{x}{x-1}\right)=x^2-\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=x^2-\frac{x^2}{(x-1)^2}==\frac{x^2\cdot(x-1)^2-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2\left[(x-1)^2-1\right]}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2\cdot(x-1-1)\cdot(x-1+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2\cdot(x-2)\cdot x}{(x-1)^2}==\frac{x^3\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$$

8. $$\left(x+\frac{x}{x-1}\right):\left(x-\frac{x}{x-1}\right)==\frac{x\cdot(x-1)+x}{x-1}:\frac{x\cdot(x-1)-x}{x-1}=$$

$$=\frac{x^2-x+x}{x-1}:\frac{x^2-x-x}{x-1}==\frac{x^2}{x-1}:\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{x^2\cdot(x-1)}{x\cdot(x-2)\cdot(x-1)}==\frac{x}{(x-2)}$$

9.

$$\frac{x}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{x}{1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}=\frac{x}{1+\frac{x}{x+1}}=\frac{x}{\frac{x+1+x}{x+1}}=\frac{x}{\frac{2x+1}{x+1}}=\frac{x(x+1)}{2x+1}$$