

1.- Indica cuales de estas expresiones son polinomios e indica su grado y término independiente.

1. $x^4 - 3x^5 + 2x^2 + 5$ 2. $\sqrt{x} + 7x^2 + 2$ 3. $x^3 - x - \frac{7}{2}$ 4. $\frac{2}{x^2} - x - 7$
 5. $x^3 + x^5 + x^2$ 6. $x - 2x^{-3} + 8$ 7. $1 - x^4$

2.- Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

1. $2x^2y^3z + 3x^2y^3z =$ 2. $2x^3 - 5x^3 =$ 3. $3x^4 - 2x^4 + 7x^4 =$ 4. $(12x^3) \cdot (4x) =$
 5. $5 \cdot (2x^2y^3z) =$ 6. $(5x^2y^3z) \cdot (2y^2z^2) =$ 7. $(18x^3y^2z^5) \cdot (6x^3yz^2) =$ 8. $(-2x^3) \cdot (-5x) \cdot (-3x^2) =$
 9. $(12x^3) : (4x) =$ 10. $(18x^6y^2z^5) : (6x^3yz^2) =$ 11. $(36x^3y^7z^4) : (12x^2y^2) =$
 12. $\frac{6x^3y^4z^2}{3x^2y^2z^2} =$ 13. $\frac{24x^5y^4 + 18x^4y^5 - 48x^{10}y^3}{6x^2y^3} =$ 14. $\frac{12x^3y^5 + 18x^5y^7 - 48x^{12}y^6}{3x^2y^4} =$

3.- Dados los polinomios: $P(x) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1$ $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 4$ $R(x) = 2x^4 - 2x - 2$

1. $P(x) + Q(x) - R(x) =$ 2. $P(x) + 2Q(x) - R(x) =$ 3. $Q(x) + R(x) - P(x) =$

4.- Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

1. $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$ 2. $(2x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x - 3) =$
 3. $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2) =$ 4. $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 3) =$
 5. $(x^5 + 2x^3 - x - 8) : (x^2 - 2x + 1) =$ 6. $(x^3 + 2x + 70) : (x + 4) =$ 7. $(x^5 - 32) : (x - 2) =$

5.- Desarrolla las siguientes expresiones:

1. $(x + 5)^2 =$ 2. $(2x - 5)^2 =$ 3. $(3x - 2) \cdot (3x + 2) =$ 4. $(2x - 3)^3 =$
 5. $(x + 2)^3 =$ 6. $(3x^2 - 2)^2 =$ 7. $(2x + 5)^3 =$ 8. $9x^2 - 25 =$
 9. $(x^2 - x + 1)^2 =$ 10. $(3x^2 - 2x) \cdot (3x^2 + 2x) =$ 11. $(-3x + 5) \cdot (-3x - 5) =$

6.- Aplicando el teorema del resto, halla el resto de las siguientes divisiones:

1. $(x^5 - 2x^2 - 3) : (x - 1)$ 2. $(2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10) : (x + 2)$ 3. $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$
 4. $(x^3 - 5x - 1) : (x - 3)$ 5. $(x^6 - 1) : (x + 1)$ 6. $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1) : (x - 1)$

7.- Comprueba que los siguientes polinomios tienen como factores los que se indican:

1. $(x^3 - 5x - 1)$ tiene por factor $(x - 3)$ 2. $(x^6 - 1)$ tiene por factor $(x + 1)$
 3. $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$ tiene por factor $(x - 1)$ 4. $(x^{10} - 1024)$ tiene por factor $(x + 2)$

8.- Hallar a y b para que el polinomio $x^5 - ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.

9.- Determina a y b para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 5$ sea divisible por $x^2 + x + 1$.

10.- Encontrar el valor de k para que al dividir $2x^2 - kx + 2$ por $(x - 2)$ dé resto 4.

11.- Determinar el valor de m para que $3x^2 + mx + 4$ admita $x = 1$ como una de sus raíces.

12.- Hallar un polinomio de cuarto grado que sea divisible por $x^2 - 4$ y se anule para $x = 3$ y $x = 5$.

13.- Calcular el valor de a para que $x^3 - ax + 8$ tenga la raíz $x = -2$, y calcular las otras raíces.

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.

1. Grado: 5, término independiente: 5.
2. No es un polinomio, porque la parte literal del primer monomio está dentro de una raíz.
3. Grado: 3, término independiente: $-7/2$.
4. No es un polinomio, porque el exponente del primer monomio no es un número natural.
5. Grado: 5, término independiente: 0.
6. No es un polinomio, porque el exponente del 2º monomio no es un número natural.
7. Grado: 4, término independiente: 1.

Ejercicio nº 2.-

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $2x^2y^3z + 3x^2y^3z = 5x^2y^3z$ | 2. $2x^3 - 5x^3 = -3x^3$ | 3. $3x^4 - 2x^4 + 7x^4 = 8x^4$ |
| 4. $(12x^3) \cdot (4x) = 48x^4$ | 5. $10x^2y^3z^3$ | 6. $10x^2y^5z^3$ |
| 7. $108x^6y^3z^7$ | 8. $-30x^6$ | 9. $3x^2$ |
| 10. $3x^3yz^3$ | 11. $3xy^5z^4$ | 12. $2xy^2$ |
| 13. $4x^3y + 3x^2y^2 - 8x^8$ | 14. $4xy^3 + 6x^3y^5 - 16x^{10}y^4$ | |

Ejercicio nº 3.-

$$1. P(x) + Q(x) - R(x) = (x^4 - 2x^2 - 6x - 1) + (x^3 - 6x^2 + 4) - (2x^4 - 2x - 2) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1 + x^3 - 6x^2 + 4 - 2x^4 + 2x + 2 = x^4 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x^2 - 6x + 2x - 1 + 4 + 2 = -x^4 + x^3 - 8x^2 - 4x + 5$$

$$2. P(x) + 2Q(x) - R(x) = (x^4 - 2x^2 - 6x - 1) + 2 \cdot (x^3 - 6x^2 + 4) - (2x^4 - 2x - 2) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1 + 2x^3 - 12x^2 + 8 - 2x^4 + 2x + 2 = x^4 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 12x^2 - 6x + 2x - 1 + 8 + 2 = -x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 4x + 9$$

$$3. Q(x) + R(x) - P(x) = (x^3 - 6x^2 + 4) + (2x^4 - 2x - 2) - (x^4 - 2x^2 - 6x - 1) = x^3 - 6x^2 + 4 + 2x^4 - 2x - 2 - x^4 + 2x^2 + 6x + 1 = 2x^4 - x^4 + x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 2x + 6x + 4 - 2 + 1 = x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x + 3$$

Ejercicio nº 4.-

$$1. (x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 4x + 6 = x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 4x + 6 = x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x + 6$$

$$2. (2x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x - 3) = 6x^6 - 10x^5 - 12x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 15x^5 + 25x^4 + 30x^3 - 20x^2 + 15x + 18x^4 - 30x^3 - 36x^2 + 24x - 18 = 6x^6 - 10x^5 - 15x^5 - 12x^4 + 25x^4 + 18x^4 + 8x^3 - 30x^3 + 30x^3 - 6x^2 - 20x^2 - 36x^2 + 15x + 24x - 18 = 6x^6 - 25x^5 + 31x^4 + 8x^3 - 62x^2 + 39x - 18$$

3.

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \\ -x^4 - 3x^3 + 2x^2 \\ \hline -5x^3 - 9x^2 + 30x \\ \quad 5x^3 + 15x^2 - 10x \\ \hline \quad \quad 6x^2 + 20x - 20 \\ \quad \quad -6x^2 - 18x + 12 \\ \hline \quad \quad \quad 2x - 8 \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r} x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x \\ -x^6 + x^5 - 3x^4 \\ \hline x^5 + 2x^4 \\ -x^5 + x^4 - 3x^3 \\ \hline 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 \\ -3x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline -6x^2 - 2x \\ \quad 6x^2 - 6x + 18 \\ \hline \quad \quad -8x + 18 \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{r}
 x^5 \quad + 2x^3 \quad - x - 8 \\
 \hline
 -x^5 + 2x^4 - x^2 \\
 \hline
 2x^4 + x^3 \\
 -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 5x^3 - 2x^2 - x \\
 -5x^3 + 10x^2 - 5x \\
 \hline
 8x^2 - 6x - 8 \\
 -8x^2 + 16x - 8 \\
 \hline
 10x - 16
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 | x^2 - 2x + 1 \\
 \hline
 x^3 + 2x^2 + 5x + 8
 \end{array}$$

6.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 0 \quad 2 \quad 70 \\
 -4 \quad -4 \quad 16 \quad -72 \\
 \hline
 1 \quad -4 \quad 18 \quad \underline{-2}
 \end{array}
 \quad
 C(x) = x^2 - 4x + 18 \quad R(x) = -2$$

7.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -32 \\
 2 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \\
 \hline
 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad \underline{0}
 \end{array}
 \quad
 C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 \quad R = 0$$

Ejercicio nº 5.-

1. $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
2. $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$
3. $(3x - 2) \cdot (3x + 2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$
4. $(2x - 3)^3 = (2x - 3)^2 \cdot (2x - 3) = \dots = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
5. $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
6. $(3x^2 - 2)^2 = (3x^2)^2 + 2^2 - 2 \cdot (3x^2) \cdot 2 = 9x^4 - 12x^2 + 4$
7. $(2x + 5)^3 = 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$
8. $9x^2 - 25 = (3x + 5) \cdot (3x - 5)$
9. $(x^2 - x + 1)^2 = (x^2 - x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) = (x^2)^2 + (-x)^2 + 1^2 + 2x^2 \cdot (-x) + 2x^2 \cdot 1 + 2 \cdot (-x) \cdot 1 = x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
10. $(3x^2 - 2x) \cdot (3x^2 + 2x) = (3x^2)^2 - (2x)^2 = 9x^4 - 4x^2$
11. $(-3x + 5) \cdot (-3x - 5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$

Ejercicio nº 6.-

1. $R(1) = 1^5 - 2 \cdot 1^2 - 3 = -4$
2. $R(-2) = 2 \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 10 = 32 + 16 + 12 - 10 + 10 = 60$
3. $R(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 81 - 27 + 2 = 56$
4. $R(3) = 3^3 - 5 \cdot 3 - 1 = 27 - 15 - 1 = 11$
5. $R(-1) = (-1)^6 - 1 = 0$
6. $R(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1^2 + 1 - 1 = 1 - 2 + 1 + 1 - 1 = 0$

Ejercicio nº 7.-

1. $(x^3 - 5x - 1)$ es divisible por $(x - 3)$ si y sólo si $P(x = 3) = 0$.
 $P(3) = 3^3 - 5 \cdot 3 - 1 = 27 - 15 - 1 \neq 0$, por lo tanto $(x - 3)$ no es un factor.
2. $(x^6 - 1)$ es divisible por $(x + 1)$ si $P(x = -1) = 0$. $P(-1) = (-1)^6 - 1 = 0$, $(x + 1)$ es un factor.
3. $(x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$ es divisible por $(x - 1)$ si y sólo si $P(x = 1) = 0$.
 $P(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1^2 + 1 - 1 = 1 - 2 + 1 + 1 - 1 = 0$, por tanto $(x - 1)$ es un factor
4. $(x^{10} - 1024)$ es divisible por $(x + 2)$ si y sólo si $P(x = -2) = 0$.
 $P(-2) = (-2)^{10} - 1024 = 1024 - 1024 = 0$, por tanto $(x + 2)$ es un factor.

Ejercicio nº 8.-

$$P(-2) = (-2)^5 - a \cdot (-2) + b = 0 \quad -32 + 2a + b = 0 \quad \mathbf{2a + b = 32}$$

$$P(2) = 2^5 - a \cdot 2 + b = 0 \quad 32 - 2a + b = 0 \quad \mathbf{-2a + b = -32}$$

$$\begin{array}{r} 2a + b = 32 \\ -2a + b = -32 \\ \hline 2b = 0 \quad \mathbf{b = 0} \quad \mathbf{a = 16} \end{array}$$

Ejercicio nº 9.-

$$\begin{array}{r} x^3 \quad + ax^2 \quad + bx + 5 \\ -x^3 \quad - x^2 \quad - x \\ \hline (a-1)x^2 + (b-1)x + 5 \\ -(a-1)x^2 - (a-1)x - a + 1 \\ \hline (b-a)x - a + 6 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + x + 1 \\ \hline x + a - 1 \end{array} \right.$$

$$b - a = 0 \quad -a + 6 = 0 \quad \mathbf{a = 6} \quad \mathbf{b = 6}$$

Ejercicio nº 10.-

$$P(2) = 2 \cdot 2^2 - k \cdot 2 + 2 = 4 \quad 10 - 2k = 4 \quad -2k = -6 \quad \mathbf{k = 3}$$

Ejercicio nº 11.-

$$P(1) = 3 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + 4 = 0 \quad 3 + m + 4 = 0 \quad \mathbf{m = -7}$$

Ejercicio nº 12.-

$$(x-3) \cdot (x-5) \cdot (x^2-4) = (x^2-8x+15) \cdot (x^2-4) = x^4 - 4x^2 - 8x^3 + 32x + 15x^2 - 60 = \mathbf{x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60}$$

Ejercicio nº 13.-

$$P(-2) = (-2)^3 - a \cdot (-2) + 8 = 0 \quad -8 + 2a + 8 = 0 \quad \mathbf{a = 0}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 8 \\ -2 \quad -2 \quad 4 \quad -8 \\ \hline 1 \quad -2 \quad 4 \quad 0 \end{array}$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0; \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \notin \mathbb{R}$$

No tiene más raíces reales.