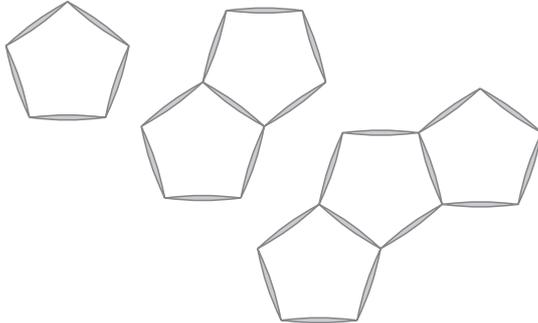


AUTOEVALUACIÓN

11.A1 Construimos con palillos las siguientes figuras.



¿Cuántos palillos se necesitan para formar una figura con n pentágonos?

$$a_1 = 5; a_2 = 9; a_3 = 13; \dots; a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$$

11.A2 Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = 3n^3 - 4n + 2$

b) $b_n = 4 - n^2$

c) $a_1 = 5; a_n = -3a_{n-1} + 8$

a) 1, 18, 71, 178, 357

b) 3, 0, -5, -12, -21

c) 3, -7, 29, -79, 245

11.A3 En una progresión aritmética, el segundo término es 9 y el cuarto es 15. Calcula la suma de los 20 primeros términos.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 9 \\ a_4 = a_1 + 3d = 15 \end{cases} \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow a_1 = 7$$

$$a_{20} = a_1 + 19d = 7 + 19 \cdot 2 = 45; S_{20} = \frac{(7 + 45) \cdot 20}{2} = 520$$

11.A4 En una progresión geométrica el segundo término es 12 y el quinto 324. Calcula la suma de los 8 primeros términos.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 r = 12 \\ a_5 = a_1 r^4 = 324 \end{cases} \Rightarrow r^3(a_1 r) = 324 \Rightarrow 12r^3 = 324 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_1 = 4$$

$$a_8 = a_1 r^7 = 4 \cdot 3^7 = 8748; S_8 = \frac{8748 \cdot 3 - 4}{2} = 13120$$

11.A5 Los ángulos de cierto triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Halla la medida de los ángulos.

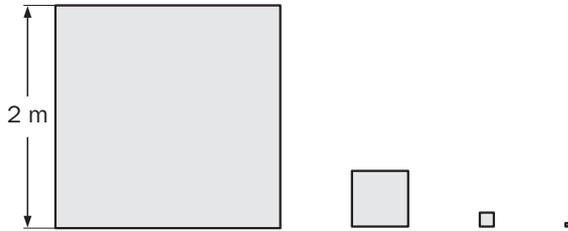
Ya que el triángulo es rectángulo, uno de sus ángulos es de 90° y los ángulos serían: $90 - 2d, 90 - d, 90$.

$$\text{Suma} \equiv 90 - 2d + 90 - d + 90 = 180 \Rightarrow 270 - 3d = 180 \Rightarrow d = 30$$

Los ángulos son: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

11 SUCESIONES. PROGRESIONES

- 11.A6 Halla la suma de las áreas de los cuatro cuadrados de la figura, sabiendo que el lado de cada uno es cuatro veces mayor que el del siguiente cuadrado.



Las áreas de los cuadrados forman una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{16}$ y $a_1 = 4$.

$$a_4 = a_1 r^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 = \frac{4}{16^3} = \frac{1}{4^5}$$

La suma de las áreas de los cuatro cuadrados es la suma de los cuatro primeros términos de la progresión geométrica:

$$S_4 = \frac{\frac{1}{4^5} \cdot \frac{1}{16} - 4}{\frac{1}{16} - 1} = 4,27 \text{ cm}^2$$

- 11.A7 La suma de los dos primeros términos de cierta progresión geométrica es igual a -1 y la suma de sus dos términos siguientes es igual a -4 .

Calcula la suma de los primeros 6 términos de esta progresión.

$$\begin{cases} a_1 + a_1 r = -1 \\ a_1 r^2 + a_1 r^3 = -4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1+r) = -1 \\ a_1(r^2+r^3) = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{1+r} = \frac{-4}{r^2+r^3} \Rightarrow r^3+r^2-4r-4=0 \Rightarrow r=-2 \text{ y } r=2$$

($r = -1$ no da una solución coherente).

$$r = -2 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_6 = a_1 r^5 = (-2)^5 = -2^5 \Rightarrow S_6 = \frac{a_6 r - a_1}{r - 1} = \frac{2^6 - 1}{-3} = \frac{1 - 2^6}{3} = -21$$

$$r = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{-1}{3} \Rightarrow a_6 = a_1 r^5 = \left(\frac{-1}{3}\right) \cdot 2^5 \Rightarrow S_6 = \frac{a_6 r - a_1}{r - 1} = \frac{1 - 2^6}{3} = -21$$

Para ambos valores de r sale la misma solución.

- 11.A8 La suma de las edades de cuatro hermanos es igual a 38 años y la diferencia entre el pequeño y el tercero es de 3 años. Averigua la edad de cada hermano sabiendo que las edades están en progresión aritmética.

$$a_3 - a_1 = 3 \Leftrightarrow a_1 + 2d - a_1 = 3 \Leftrightarrow 2d = 3 \Rightarrow d = 1,5$$

$$S_4 = 38 \Leftrightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 4a_1 + 6d = 4a_1 + 9 = 38 \Rightarrow 4a_1 = 29 \Rightarrow a_1 = 7,25$$

Las edades de los cuatro hermanos son de 7,25, 8,75, 10,25 y 11,75 años.

- 11.A9 Calcula el número de términos de la siguiente sucesión: 7, 14, 28, 56, ..., 896.

La sucesión es una progresión geométrica, ya que: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = 2 = r$.

$$an = a_1 r^{n-1} \Leftrightarrow 896 = 7 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow 128 = 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^7 = 2^{n-1} \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8.$$

La sucesión tiene 8 términos.

11 SUCESIONES. PROGRESIONES

11.A10 Halla el término general de una progresión aritmética cuyo tercer término es 13 y el quinto es 21.

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 13 \\ a_5 = a_1 + 4d = 21 \end{cases} \Rightarrow 2d = 8 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_1 = 5$$

El término general buscado es: $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$.

11.A11 Halla el término general de una progresión geométrica que verifica que $a_2 = 15$ y $a_4 = 135$.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 r = 15 \\ a_4 = a_1 r^3 = 135 \end{cases} \Rightarrow a_1 r \cdot (r^2) \Leftrightarrow 135 \Rightarrow 15r^2 = 135 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ y } r = -3$$

$$\text{Si } r = -3 \Rightarrow a_1 = -5 \Rightarrow a_n = -5 \cdot (-3)^{n-1}$$

$$\text{Si } r = 3 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$$