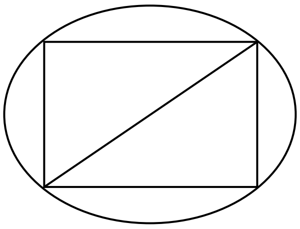
Calcular la longitud que deben tener los lados de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 5 m para que el área del rectángulo sea máxima.



Si designamos por x e y las anchura y altura del rectángulo =>

Función a optimizar área : $x\,y$ ➔ $f(x, y) = x\,y$

Función condición $x^2 + y^2 = d^2$ $x^2 + y^2 = 4r^2 = 100$; $y = \sqrt{25 - x^2}$

Si sustituímos este valor en f(x, y) obtenemos la función en una sola variable :

$$S = x \cdot \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25x^2 - x^4} \ ; \quad S' = \frac{50x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{25x^2 - x^4}}$$

$S' = 0$ ➔ $50x - 4x^3 = 0$ ➔ $x \cdot (50 - 4x^2) = 0$

$$=> \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 = 50 => x^2 = \dfrac{25}{2} => x = \pm\dfrac{5}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

La solución $x = 0$ y la $x = -5/\sqrt{2}$ carecen de sentido porque se refiere a una longitud

La única válida es : $x = 5/\sqrt{2}$y la ordenada correspondiente es : $y = 5/\sqrt{2}$

El valor del área máxima será, calculada mediante S(x) = x · y = $\frac{25}{2}$ = 12,5 cm^2

Con un hilo de 60 cm, formar un rectángulo que, al girar alrededor de uno de sus lados, engendre un cilindro de área lateral máxima.

$$x + y + x + y = 60 \rightarrow 2x + 2y = 60$$

$$x + y = 30 \rightarrow y = 30 - x \rightarrow es\ la\ condición$$

$$S_e = 2\pi xy\ es\ lo\ que\ deseo\ sea\ máximo$$

$$S_e = 2\pi x(30 - x) = 60\pi x - 2\pi x^2 \qquad\qquad S_e' = 60\pi - 4\pi x \rightarrow$$

$$S_e' = 0 \rightarrow 60\pi = 4\pi x \rightarrow x = \frac{60\pi}{4\pi} = 15cm \rightarrow y = 30 - 15 = 15cm$$

$El\ rectangulo\ es\ un\ cuadrado\ de\ lado\ 15\ cm\ para\ que\ el\ área\ lateral\ del\ cilindro\ engendrado\ sea\ máxima$

$$S_{e_{max}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 15 = 250\pi\ \ m^2$$

Determinar el punto de la curva $\boldsymbol{y = \frac{1}{1+x^2}}$ en el que la tangente a la curva forma con el eje OX el mayor ángulo posible.

$$y = \frac{1}{1 + x^2}; \qquad y' = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2} = tg\alpha$$

El máximo de y ‘será calcular la y “e igualar a cero

$$y" = -\frac{2(1 + x^2)^2 + 2x\ 2\ (1 + x^2)2x}{(1 + x^2)^3} = -\frac{2 - 2x^2 + 8x^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$$

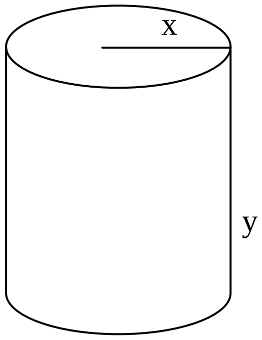
y”= 0 => $6x^2 - 2 = 0$; $x^2 = \frac{1}{3}$; $\boldsymbol{x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}$

Para ver si es máximo el + o – se halla y ‘’’ ;

$$y'''(x) = \frac{24x^3 + 24\,x}{(1 + x^2)^4} \Rightarrow \begin{cases} y'''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{+}{+} > 0 \quad \text{Min No vale} \\ y'''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{24\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - 24\frac{1}{\sqrt{3}}}{+} = \frac{-}{+} < 0\ \ Máx \end{cases}$$

$$La\ tangente\ es\ maxima\ en\ el\ punto\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$$

Determinar las dimensiones de una vasija en forma de cilindro circular recto de 2m^3 de volumen, de forma que sea mínima la cantidad de material usado para su construcción.



Necesito que S_T sea mínima

$$\begin{cases} V = \pi x^2 \cdot y = 2 \;\; => \;\; y = \dfrac{2}{\pi x^2} \\ S_T = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot y \end{cases}$$

$$S_T = 2\pi\, x^2 + \; 2\cancel{\pi}\, x \, \frac{2}{\cancel{\pi} x^2} \;\; ; \; S_T = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}$$

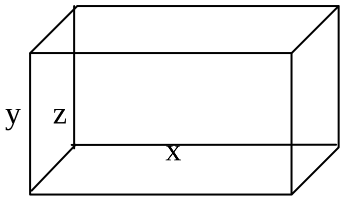
$$S_T{}' = \; 4\pi\, x - \frac{4}{x^2} = \; \frac{4\pi\, x^3 - 4}{x^2} \qquad Para\ que\ S_T{}' = 0\ necesitamos\ que:$$

$$4\pi x^3 - 4 = 0\, ; x^3 = \frac{4}{4\pi}\; ; x^3 = \frac{1}{\pi}\; ; x = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \;\; => \;\; \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{\pi}}}$$

$$\boldsymbol{S_T}{}'' = 4\,\pi + \frac{8x}{x^4} = 4\pi + \frac{8}{x^3} \;\; => \;\; \boldsymbol{S_T}{}''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = \boldsymbol{4\pi} + \frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{\pi}} > 0$$

La S_T es mínima para $x = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\; ; \; y = \frac{2}{\pi\sqrt[3]{\pi^2}}$

Determinar las dimensiones que hacen mínima la superficie total de un ortoedro si su volumen es 72 cm^3 y la razón de dos de sus dimensiones es ½.



$S_T = 2\,(xz + yz + xy)$

$V = x \cdot y \cdot z = 72$

$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2x$

$$Si\ x \cdot y \cdot z = 72;\ x \cdot 2x \cdot z = 72;\ z = \frac{72}{2x^2} = \frac{36}{x^2}$$

$S_T = 2\ \left(\frac{36}{x^2}\ x + 2x\ \frac{36}{x^2} + \ x \cdot 2x\right) = \ 2\ (\frac{108}{x} + \ 2x^2)$

S_T=$2\left(-\frac{108}{x^2} + \ 4x\right) = 2\left(- \ \frac{108+4x^3}{x^2}\right)$ Para que $S_T' = 0 \Rightarrow -108 + 4x^3 = 0$

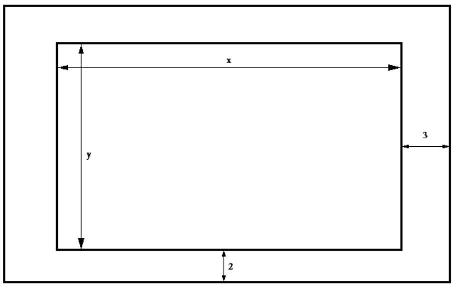
$4x^3 = 108\ ;x^3 = 27\ ;x = \sqrt[3]{27} \Rightarrow \boldsymbol{x = 3}$ **; y = 6**

$z = \frac{36}{9} \Rightarrow \boldsymbol{z = 4}$ Veamos que S_T es mínima y no máxima.

S''=$2\ \left(\frac{2x108}{x^3} + \ 4\ \right) = \ 2\ \left(\frac{216}{x^3} + \ 4\ \right)$

$S''(3)$= $2\ (\frac{216}{27} + \ 4\ ) > 0$ Luego S_T es mínimo para x = 3 , y = 6, z = 4.

La parte escrita ocupa 400cm^2 en la página de un libro, los márgenes superior son de 2cm y los laterales de 3cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para obtener la mayor economía del papel?



x · y = 400 $\quad y = \dfrac{400}{x}$

$$S = (x+6)(y+4) = (x+6)\bullet\left(400\!\!\not{}_4 + 4\right) = 400 + \frac{2400}{x} + 4x + 24$$

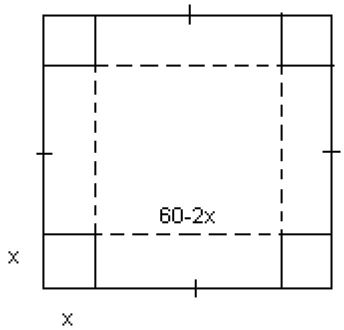
$$S = 424 + \frac{2400}{x} + 4x$$

$S' = -\dfrac{2400}{x^2} + 4$ Para que $S' = 0$; $2400 = 4x^2$; $x^2 = 600$; $x = 10\sqrt{6}$

$S'' = \dfrac{2400 \cdot 2}{x^3}$; $S''\left(10\sqrt{6}\right) = \dfrac{4800}{1000 \cdot 6\sqrt{6}} > 0$ Mínimo

Las dimensiones pedidas son, por tanto, $\left(6 + 10\sqrt{6}\right)$cm. y $\left(4 + 10\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)$cm.

Sea una cartulina cuadrada de 60cm de lado, se desea construir una caja de base cuadrada, sin tapa, recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando. Comprobar que para que la caja sea de máxima capacidad, los cuadrados deben tener 10cm de lado.



Se forma una caja de base cuadrada y lado 60 - 2x y altura x cm.

$V = S_{base} \cdot h = (60 - 2x)^2 \cdot x = 3600 + 4x^3 - 240x^2$

$V' = 3600 - 480x + 12x^2$; $V' = 0$ (máximo o mínimo)

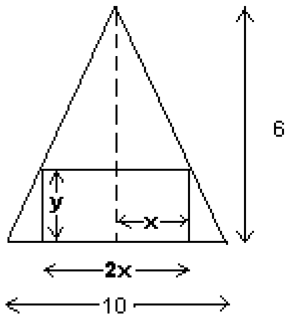
$12x^2 - 480x + 3600 = 0$; $x^2 - 40x + 300 = 0$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1200}}{2} = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{40 \pm 20}{2} = \begin{cases} x = 30 \\ x = 10 \end{cases}$$

Si x fuera 30cm, me quedaría sin cartulina por lo que $x = 10$cm → $V' = 0$

$V'' = 24x - 480$; $V''(10) = 24 \cdot 10 - 480 < 0$ → máxima capacidad.

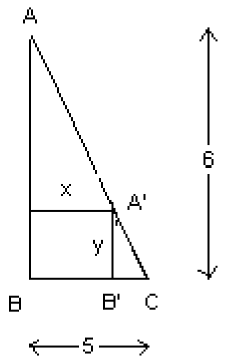
Se considera un triángulo isósceles de base 10cm y altura 6cm. Se inscribe en él un rectángulo de base 2x sobre la base del triángulo. Calcular la base del rectángulo inscrito para que su área sea máxima.



Quiero que sea máxima

S = 2 x y

Hay 2 triángulos ABC Y A'B'C semejantes: AB / A'B' = AC / B'C



$$\frac{6}{\mathrm{y}} = \frac{5}{5-\mathrm{x}} \;\; ; \;\; 30 - 6\mathrm{x} = 5\mathrm{y} \;\; => \;\; y = \frac{30-6\mathrm{x}}{5} \quad \text{condición}$$

$$S = 2x \cdot \frac{30-6\mathrm{x}}{5} = \frac{60\mathrm{x} - 12\mathrm{x}^2}{5} \quad ; \quad S' = \frac{1}{5} \cdot (60 - 24\mathrm{x}) \;\; ; S' = 0 \;\; \text{posible max, min}$$

$$60 - 24x = 0 \;\; ; \;\; 24x = 60 \;\; => \;\; x = \frac{60}{24} = 2{,}5 \; cm \;\; e \;\; y = \frac{30 - 6 \cdot 2{,}5}{5} = 3 \; cm$$

La base del rectángulo es 2x, es decir, 5cm, y la altura es de 3cm para que el área inscrita sea máxima.

Comprobación:

$$S'' = \frac{1}{5} \cdot (-24) = -\frac{24}{5} < 0 \;\; => \;\; máximo$$

Se desea construir una caja sin tapa con base cuadrada, empleando 108 cm^2 de cartón. Hallar las dimensiones de la caja de volumen máximo

Sean las dimensiones : x , lado del cuadrado base , y altura z

Función a optimizar $V = x^2 z$

Función de condición La superficie total es $S = x^2 + 4xz = 108\ cm^2$

$$\text{De esta ecuación} \Rightarrow z = \frac{108 - x^2}{4x} \quad y\ se\ sustituye\ en\ V = x^2 \cdot z$$

$$V = \frac{1}{4x} \cdot x^2 \cdot (108 - x^2) = \frac{1}{4}\, x \cdot (108 - x^2) = \frac{1}{4} \cdot (108x - x^3)\ ;$$

$V' = \frac{1}{4}(108 - 3x^2)$ Como $V' = 0$ ➔ $108 - 3x^2 = 0$

$3x^2 = 108$ ➔ $x^2 = 36$ $x = \pm 6$ El valor x = - 6 no es valido

Comprobación del carácter del extremo :

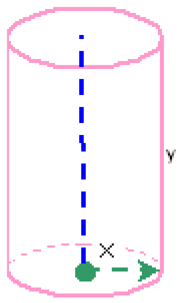
$V''(x) = \frac{1}{4} 3(-6x) = -3/2\, x$; $V''(6) = -9 < 0$ *máximo para x = 6*

$$La\ altura\ será\text{:}\ z = \frac{108 - 36}{4 \cdot 6} \Rightarrow z = \frac{72}{24} = 3$$

La caja tiene de dimensiones $6^2\ cm^2 \cdot 3\ cm$: base cuadrada de lado 6 cm, altura 3 cm

$V = 108\ cm^3$

Se desea construir un depósito de latón, con forma de cilindro, de área total igual a 54 m^2. Determinar el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.



Llamamos x al radio del círculo (base) e y a la altura. El dato es el área total (condición) y la incógnita que deseamos máximo es el volumen.

$$S_t = 2S_b + S_e \quad \rightarrow S_b = \pi x^2 \quad y \quad S_e = 2\pi xy$$

$$S_t = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 54 \rightarrow \pi x^2 + \pi xy = 27 \rightarrow \pi xy = 27 - \pi x^2 \rightarrow y = \frac{27 - \pi x^2}{\pi x}$$

$$V = x(27 - \pi x^2) = 27x - \pi x^3$$

$$V' = 27 - 3\pi x^2 \rightarrow V' = 0 \rightarrow 3\pi x^2 = 27 \rightarrow x^2 = \frac{9}{\pi} \rightarrow x = \mp\frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

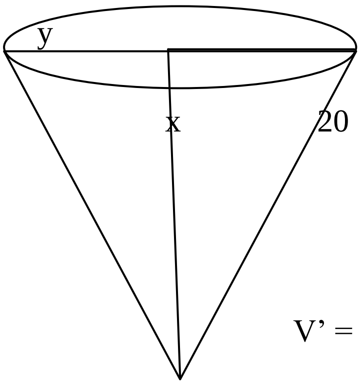
$$El\ valor\ negativo\ no\ vale, pues\ el\ radio\ es\ positivo.$$

$$V'' = -6\pi x \rightarrow V''\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) = -6\pi \cdot \frac{3}{\sqrt{\pi}} < 0 \rightarrow V\ es\ máximo\ para\ x = \frac{3}{\sqrt{\pi}} m$$

$$y = \frac{27 - \pi\frac{9}{\pi}}{\pi\frac{3}{\sqrt{\pi}}} = \frac{18\sqrt{\pi}}{3\pi} = \frac{9\sqrt{\pi}}{\pi} = \frac{9}{\sqrt{\pi}} m$$

$$El\ volumen\ máximo\ será\ V = \pi \cdot \frac{9}{\pi} \cdot \frac{9}{\sqrt{\pi}} = \frac{81}{\sqrt{\pi}}\ m^3$$

Se desea construir un embudo cónico de generatriz 20 cm. Determinar la altura del embudo de forma que su volumen sea máximo.



$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 x$ Necesito poner V en función de x.

r = $\sqrt{20^2 - x^2} = \sqrt{400 - x^2}$

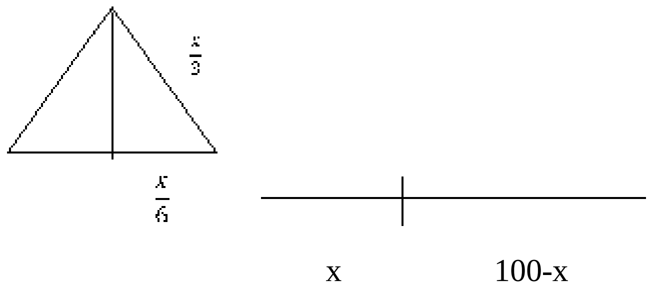
V= $\frac{1}{3}\,\pi\,(400 - x^2)x = \frac{400\,\pi}{3}\,x - \frac{\pi}{3}\,x^3$

V’ = $-\frac{3\pi}{3}x^2 + \frac{400\pi}{3}$ Para que V’ = 0 => $x^2 = \frac{400\pi}{3\pi}$; $x = \pm\,\frac{20}{\sqrt{3}}$

El – no vale pues $\nexists$ alturas negativas $\boldsymbol{x = \frac{20}{\sqrt{3}}}$

V” = $-2\pi x$; $V''\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = -2\pi\,\frac{20}{\sqrt{3}} < 0$ => El volumen es máximo para $x = \frac{20}{\sqrt{3}}$

Se divide un alambre de 100m de longitude en dos segmentos de longitudes x y 100-x. Con el de lonfitud x se forma un triangulo equilátero y con el otro segmento se forma un cuadrado. Siendo f(x) la suma de las áreas del triangulo y del cuadrado: a) Determina el dominio de la función f(x), es decir, los valores que puede tomar x. b) Con el estudio de la derivada f(x). obtén cuando f(x) es creciente y decreciente. C) Indica razonadamente para que valor de x se obtiene la suma de las áreas del triangulo y del cuadrado es mínima.



$$f(x) = S_{\Delta} + S_{\blacksquare} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot h + \left(\frac{100-x}{4}\right)$$

$$donde\ h = \sqrt{\frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36}} = \sqrt{\frac{27x^2}{36}} = \frac{3\sqrt{3}\,x}{6} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{6}x \cdot \frac{\sqrt{3}\ x}{2} + \frac{(100-x)^2}{16} = \frac{\sqrt{3}}{12}x^2 + \frac{(100-x)^2}{16}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 2x - \frac{2(100-x)}{16} = \frac{\sqrt{3}}{6}x - \frac{100-x}{8} > 0\ Creciente.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} > \frac{100-x}{8}; 4\sqrt{3}\mathrm{x} > 300 - 3x; \qquad \left(4\sqrt{3}+3\right) \cdot x > 300$$

$$x > \frac{300}{4\sqrt{3}+3} > 17.8\ Creciente.$$

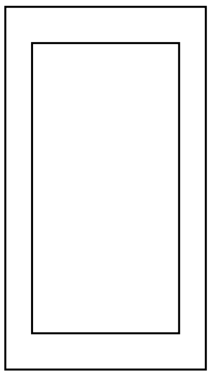
$$S_{min\Rightarrow} \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{100-x}{8} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{100-x}{4} \rightarrow 4\sqrt{3}x = 300 - 3x \rightarrow x = \frac{300}{4\sqrt{3}+3} = 17.8$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{8} > 0\ \forall x \longrightarrow x = 17.8\ hay\ mínimo\ de\ suma\ de\ áreas.$$

$$Cómo\ D{:}\ \forall x \in (0,100) \begin{cases} (0,17.8) \rightarrow y'(x_0) < 0 \rightarrow Decreciente \\ (17.8,100) \rightarrow y'(x_0) > 0 \rightarrow Creciente \end{cases}$$

Una página ha de contener 96 cm^2 de zona impresa. Los márgenes superior e inferior han de tener 3 cm de anchura y los laterales 2 cm. Halla las dimensiones de la página para que el papel requerido sea mínimo

La gráfica será de la forma :



b+ 6

a + 4

Si llamamos *a* a la anchura y *b* a la altura de la zona escrita , la función *f* , superficie total del papel, a optimizar será :

$f(a, b) = (a + 4) \cdot (b + 6)$

$f(a, b) = a\,b + 6\,a + 4\,b + 24$

La condición es que la zona escrita ha de tener 96 cm^2:

$a \cdot b = 96 \Rightarrow b = 96 / a$

$f(a, b) = a \cdot (96 / a) + 6a + 4 \cdot (96 / a) + 24 = 96 + 6a + 384 / a + 24$

$f(a, b) = 120 + 6a + 384 / a$

$f'(a, b) = 6 - 384 / a^2 \Rightarrow 6 - 384 / a^2 = 0 \Rightarrow 6a^2 = 384 \Rightarrow a^2 = 64$

$a = 8$ y $b = 12$

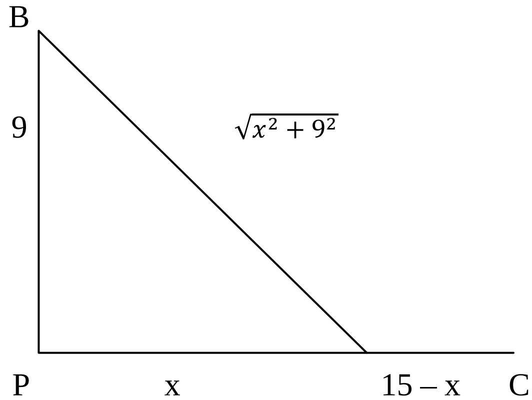
La solución $a = -8$ carece de sentido porque se refiere a una longitud

La zona escrita ha de tener 8 cm x 12 cm

El papel tendrá unas dimensiones de (8 + 4) cm x (12 + 6) cm = 12 x 18 = 216 cm^2

Un barco B está anclado a 9 km del puerto más cercano P de una costa que forma línea recta, y a 15 km del punto P hay un campamento C. un mensajero debe ir desde el barco al campamento. Teniendo en cuenta que puede remar a una velocidad de 4 km/h; halla el punto Q de la costa, entre P y C, en el que debe desembarcar, para llegar al campamento lo antes posible.

$V_{BQ} = 4$ km/h
$V_{QC} = 5$ km/h



$$\begin{cases} \sqrt{x^2+9^2} = 4t_1 \\ 15 - x = 5t_2 \end{cases} \quad t = t_1 + t_2$$

$$t = \frac{\sqrt{x^2+81}}{4} + \frac{15-x}{5} \qquad t_{min} \Rightarrow t' = \frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+81}} + \frac{1}{5}\cdot(-1) \Rightarrow t' = 0$$

$$\frac{2x}{8\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow 5x - 4\sqrt{x^2+81} = 0\ ;\ 5x = 4\sqrt{x^2+81}$$

$$25x^2 = 16\cdot(x^2+81) \Rightarrow 9x^2 = 16\cdot 81 \Rightarrow x^2 = \frac{16\cdot 81}{9} = 144 \Rightarrow x = 12\ Km$$

La distancia PQ debe ser ser de 12 km para que el tiempo sea mínimo.

Un bote de conserva de tomate ha de tener una capacidad de 1 litro. Se pide la proporción entre su altura y el diámetro de su base para que la superficie de latón sea mínima

Función a optimizar $S_T = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h = 2 \pi r (r + h)$

Función de condicion El volumen ha de ser de 1 litro = 1 *dm*3

$$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \pi r^2 h = 1 \quad \Rightarrow h = 1 / \pi r^2$$

Sustituyendo este valor de *h* en la superficie a optimizar, obtenemos :

$S_T = 2 \pi r^2 + 2 \pi r / \pi r^2 = 2 \pi r^2 + 2 / r$ es la función a optimizar, en función de *r*

Derivamos $S_T' = 4 \pi r - 2 / r^2 = (4 \pi r^3 – 2) / r^2$

$$S_T' = 0 \Rightarrow (4 \pi r^3 – 2) = 0 \Rightarrow r^3 = 1 / 2\pi \Rightarrow r = \sqrt[3]{1 / 2\pi}$$

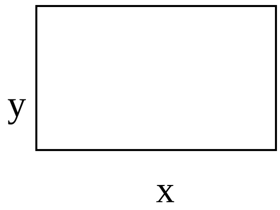
Queda tan sólo por comprobar que la superficie es mínima , calculando la S_T''

$S_T'' = 4\pi + 4 / r^3 \qquad S_T'' (r) = 4\pi + 4 / (1/2\pi) = 12 \pi > 0$ luego si es minimo

En el caso estudiado $r =$ 0,542 dm y la h = 1,084 dm

La altura del un bote cilíndrico circular ha de ser igual que el diámetro de la base para que la superficie total sea mínima para un volumen fijo cualquiera.

Un pastor desea cerrar un recinto rectangular usando 100 m de cerca. ¿Cuál es la mayor área que puede encerrar?



El perímetro es de 100 m y el área será $S = x \cdot y$ que es lo que queremos que sea máximo.

La condición es que $p = x + y + x + y =$ $2x + 2y = 100$; $x + y = 50$; $y = 50 - x$

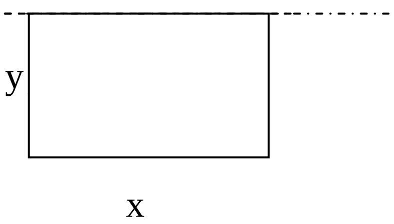
y sustituyo en S $S = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$; derivo S. $S' = 50 - 2x$

$S' = 0$; $50 - 2x = 0$; $2x = 50$; $x = 25$; $y = 50 - 25$ $\boxed{y = 25}$

estas son las dimensiones del area máxima, ya que $S'' = -2$; $S''(25) = -2 < 0$ max.

El valor de Smax. $= 25 \cdot 25 = 625\ m^2$

Un pastor desea cerrar un recinto circular usando 100m de cerca nueva. Aprovecha para uno de los lados una valla ya existente (muy larga). ¿Cuál es la mayor área que puede encerrar?



Los 100 m se usan para cerrar los tres lados libres del rectángulo.

La condición será $x + 2y = 100$ El $S = x \cdot y$ es lo que queremos que sea máxima.

Despejo $x = 100 - 2y$ de la condición y sustituyo en S

$S = (100 - 2y) \cdot y = 100 \cdot y - 2y^2$ $S' = 100 - 4y$; $S' = 0$; $100 - 4y = 0$; $4y = 100$;

$y = 25$ y como $S'' = -4$; $S''(25) = -4 < 0$ máxima área para $y = 25$

$x = 100 - 2 \cdot 25 = 100 - 50 \longrightarrow \boxed{x = 50}$

El área máxima será $S = 50 \cdot 25 = 1250\, m^2$