ESTUDIO LOCAL DE LA FUNCIÓN

Calcular las asíntotas de $\mathbf{y = x \cdot e^{1/x} + 2}$

$$Dominio: \begin{cases} x \;\; definida \; \forall x \in R \\ e^{1/x} \; definida \; \forall x \in R - \{x = 0\} \;\; => f(x) definida \; \forall x \in R - \{x = 0\} \\ 2 \;\; definida \; \forall x \in R \end{cases}$$

$$A.V: \;\; \lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{1/x} + 2 = 0 \cdot \infty + 2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} + 2 = \frac{\infty}{\infty} + 2 =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} + 2 = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} + 2 = e^{\infty} + 2 = \infty + 2 = \infty \;\; => \;\; x = 0 \; es \; A{:}V$$

$$\lim_{x\to 0^-} x \cdot e^{1/x} + 2 = 0 \cdot e^{1/\infty} + 2 = 0"0 + 2 = 2 \;\; => \nexists \; A.V \;\; cuando \; x \to 0^-$$

$$A.H: \; y = \lim_{x\to \infty^+} x \cdot e^{1/x} + 2 = \infty \cdot e^{1/\infty} + 2 = \infty \cdot e^0 + 2 = \infty \cdot 1 + 2 = \infty => \; \nexists AH$$

$$y = \lim_{x\to \infty^-} x \cdot e^{1/x} + 2 = -\infty \cdot e^{-1/\infty} + 2 = -\infty \cdot e^0 + 2 = \infty \cdot 1 + 2 = \infty => \; \nexists AH$$

$$A.O{:} m = \lim_{x\to \infty^+} \frac{x \cdot e^{1/x} + 2}{x} = \lim_{x\to \infty^+} e^{1/x} + \lim_{x\to \infty^+} \frac{2}{x} = e^0 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to \infty^+} \left(x \cdot e^{1/x} + 2 - x\right) = \lim_{x\to \infty^+} x \cdot \left(e^{1/x} - 1\right) + 2 = \infty \cdot 0 + 2 =$$

$$= \lim_{x\to \infty^+} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} + 2 = \lim_{x\to \infty^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} + 2 = \lim_{x\to \infty^+} e^{1/x} + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$y = x + 3 \;\; es \; A.O \;\; cuando \; x \to \infty^+$$

$$m = \lim_{x\to \infty^-} \frac{x \cdot e^{1/x} + 2}{x} = \lim_{x\to \infty^-} e^{1/x} + \lim_{x\to \infty^-} \frac{2}{x} = e^0 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to \infty^-} \left(x \cdot e^{1/x} + 2 - x\right) = \lim_{x\to \infty^-} x \cdot \left(e^{1/x} - 1\right) + 2 = -\infty \cdot 0 + 2 =$$

$$= \lim_{x\to \infty^-} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} + 2 = \lim_{x\to \infty^-} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} + 2 = \lim_{x\to \infty^-} e^{1/x} + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$y = x + 3 \;\; es \; A.O \;\; cuando \;\; x \to \infty^-$$

Calcular las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, de las funciones: a) $\mathbf{y = \ln\left(1 + e^{-x^2}\right)}$; b) $\mathbf{y = x^2 \cdot e^{-x}}$

a) $y = \ln\left(1 + e^{-x^2}\right)$

$\mathrm{A.V}:\ y = \infty, \qquad \nexists \mathrm{x}\ \text{que haga}\ y = \infty \ => No\ hay$

$$A.H: y = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + e^{-x^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^{\infty}}\right) = \ln 1 = 0 \ => y = 0\ es\ A.H$$

$$A.O:\ m = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + e^{-x^2}\right)}{x} = \frac{0}{\infty} = 0 \ => \ \nexists\ A.O$$

b) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

$\mathrm{A.V}:\ \nexists\ x \in R \ => \ y = \infty$

$$A.H:\ y = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1/e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \ => y = 0 \ \ es\ A.H \ \ si\ x \to +\infty$$

$$y = \lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \infty \cdot e^{\infty} = \infty \ \ => \ \nexists\ A.H\ si\ x \to -\infty$$

$$A.O:\ m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{-x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \ => \ \nexists\ A.O$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty \cdot \infty = \infty \ \ => \ \nexists\ A.O\ ;$$

$\exists\ rama\ parabolica$

Calcular máximos, mínimos e intervalos de monotonía y curvatura $\boldsymbol{de\ la\ curva\ y = \frac{x}{x^2+1}}$.

Dominio : $\forall x \in R$

$$y' = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}\ ;\ \ y' = 0$$

$$-x^2+1=0\ \ => \ \ x^2=1\ \ => x = \pm 1\ \ Posibles\ máximos\ o\ mínimos$$

$$y'' = \frac{-2x \cdot (x^2+1)^2 - (-x^2+1) \cdot 2 \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$\frac{-2x \cdot (x^2+1) - (-x^2+1) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3-2x+4x^3-4x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$$

$$\begin{cases} y''(1) = \dfrac{2-6}{2^3} < 0\ \ => \ \ Máx\ \left(1,\dfrac{1}{2}\right) \\ y''(-1) = \dfrac{-2+6}{2^3} > 0\ \ => \ \ Mín\ \left(-1-,\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$y''=0\ \ => 2x^3-6x=0\ ; 2x \cdot (x^2-3)=0 => \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3\ \ => x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$Posibles\ \ PI$$

$$Monotonía: \begin{cases} y'(2) = \dfrac{-4+1}{5^2} < 0\ \ \ => Decreciente\ \forall x \in (-\infty,-1) \\ y'(0) = \dfrac{1}{1} > 0\ \ =>\ \ \ Creciente\ \forall x \in (-1,1) \\ y'(2) = \dfrac{-4+1}{5^2} < 0\ \ \ => Decreciente\ \forall x \in (1,\infty) \end{cases}$$

$$\text{Curvatura:} \begin{cases} y''(-2) = \dfrac{2 \cdot (-8)+12}{5^3}\ < 0 => ramas\ abajo\ \forall x \in \left(-\infty,-\sqrt{3}\right) \\ \hfill \text{PI}\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ y''(-1) = \dfrac{2 \cdot (-1)+6}{2^3} > 0 => ramas\ arriba\ \forall x \in \left(-\sqrt{3},0\right) \\ \hfill \text{PI } (0,0) \\ y''(1) = \dfrac{2 \cdot (1)-6}{2^3} < 0 => ramas\ abajo\ \forall x \in \left(0,\sqrt{3}\right) \\ \hfill \text{PI}\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ y''(2) = \dfrac{2 \cdot (-8)-12}{5^3} > 0 => ramas\ arriba\ \forall x \in \left(\sqrt{3},\infty\right) \end{cases}$$

Calcular máximo, mínimo, Punto de Inflexión, intervalos crecimiento y decrecimiento e intervalos de curvatura de la $y = (x - 1)^3$

$y' = 3\cdot (x - 1)^2$; $y' = 0 \Rightarrow 3\cdot (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x - 1 = 0$; $x = 1$ posible max, min

$y'' = 6\cdot (x - 1)$; $y''(1) = 6\cdot (1 - 1) = 0$? Hay que buscar la tercera

$y''' = 6$ $y'''(1) \neq 0$ Hay un PI en $x = 1$ => PI (1,0)

Como el dominio es toda la recta real f(x) es creciente en x = 1, no existe max, min con lo que f(x) es creciente $\forall \mathbf{x} \in R$

$y''(x) > 0$; $6\cdot(x - 1) > 0$; $x - 1 > 0$; $x > 1$ $\forall \mathbf{x} \in (1, \infty)$ ramas hacia arriba

$y''(x) < 0$; $6\cdot(x - 1) < 0$; $x - 1 < 0$; $x < 1$ $\forall \mathbf{x} \in (-\infty, 1)$ ramas hacia abajo

Calcular puntos notables, e intervalos de monotonía y curvatura de $\boldsymbol{y = \dfrac{\ln x}{x}}$

D = R – { x > 0} = ∀ x ∈ (0, ∞)

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}\ ;\ \ y'(x) = 0\ \ ; 1-\ln x = 0\ ;\ \ln x = 1\ ;\ e^{\ln x} = e^1\ \ ; x = e$$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-1-2+2\cdot \ln x}{x^3} = \frac{-3+2\cdot\ln x}{x^3}$$

$$y''(e) = \frac{3+2\cdot \ln e}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0 \quad Máximo\ \left(e, \frac{1}{e}\right)$$

1 e^2

0 e

$$monotonia \begin{cases} y'(1) = \dfrac{1-\ln 1}{1^2} > 0\ \ creciente\ \forall x \in (0, e) \\ y'(e^2) = \dfrac{1-\ln e^2}{(e^2)^2} < 0\ \ decreciente\ \forall x \in (e, \infty) \end{cases}$$

$$y'' = 0\ \ => \ \frac{-3+2\cdot\ln x}{x^3} = 0\ \ ;\ -3+2\cdot\ln x = 0\ ;\ \ 2\cdot\ln x = 3\ ;\ \ln x = \frac{3}{2}$$

$$e^{\ln x} = e^{3/2}\quad => \quad x\ =\ e^{3/2}\ \ posible\ P.I$$

1 e^2

0 $e^{3/2}$

$$Curvatura: \begin{cases} y''(1) = \dfrac{-3+2\cdot\ln 1}{1^3} = \dfrac{-3}{1} < 0\ \ ramas\ hacia\ abajo\ \forall x \in \left(0, e^{3/2}\right) \\ \qquad\qquad P.I\ \ \left(e^{3/2}, \dfrac{3}{2e^{3/2}}\right) \\ y''(e^2) = \dfrac{-3+2\cdot\ln e^2}{(e^2)^3} = \dfrac{1}{+} > 0\ \ ramas\ hacia\ arriba\ \forall x \in \left(e^{3/2}, \infty\right) \end{cases}$$

Calcular puntos notables, intervalos de monotonía y curvatura de la función:

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

D = R- $\left\{0\right\}$

$y' = \frac{2x\,.\,x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{2\,x^2 - x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

$y'_{(x)} = 0$; $\frac{x^2-1}{x^2} = 0$; $\mathbf{x^2 - 1} = 0$; x = $\pm$ 1 posibles máx. , min.

$y'' = \frac{2x\,.\,x^{\cancel{2}} - (x^2-1)\,.\,2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2}{x^3} = \frac{2}{x^3}$

$y''_{(1)} = \frac{2}{1} > 0$ min. (1,2)

$y''_{(-1)} = \frac{2}{-1} < 0$ máx. (-1,-2)

$y''_{(x)} = 0$; $\frac{2}{x^3} = 0$; 2 = 0 $\nexists \mathbf{x} \in \mathbf{R}$ $\nexists$ P.I.

Monotonía de f(x)

$\forall \mathbf{x} \in (-\infty, -1)$ x = -2 ; $\mathbf{y'(-2) > 0}$ Creciente

$\forall \mathbf{x} \in (-1, 0)$ x = -0,5 ; $\mathbf{y'(-0,5) < 0}$ Decreciente

$\forall \mathbf{x} \in (0, 1)$ x = 0,5 ; $\mathbf{y'(0,5) < 0}$ Decreciente

$\forall \mathbf{x} \in (1, \infty)$ x = 2 ; $\mathbf{y'(2) > 0}$ Creciente

Creciente $\forall \mathbf{x} \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; Decreciente $\forall \mathbf{x} \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

Curvatura de f(x)

$y''_{(x)} > 0$; $\frac{2}{x^3} > 0$

$\forall \mathbf{x} \in (-\infty,0)$ x = -1 ; $\mathbf{y''(-1)} = \frac{2}{-1} < 0$ - $\forall \mathbf{x} \in (-\infty,0)$

$\forall \mathbf{x} \in (\mathbf{0}, \infty)$ x = 1 ; $\mathbf{y''(1)} = \frac{2}{1} > 0$ + $\forall \mathbf{x} \in (\mathbf{0}, \infty)$

$$\textbf{Dada la función } \mathbf{f(x)} = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{1})^2}{\mathbf{x}+\mathbf{1}}, \textbf{se pide: a) máximos y mini} - $$
$$\boldsymbol{mos; b) \; intervalos \; de \; crecimiento \; y \; decrecimiento \; ; c) \; Pun -}$$
$$\boldsymbol{tos \; de \; inflexión \; e \; intervalos \; de \; curvatura.}$$

$$\mathbf{f(x)} = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{1})^2}{\mathbf{x}+\mathbf{1}} \quad \textbf{esta definida salvo para } \mathbf{x} = -\mathbf{1} \, .$$

$$\mathbf{f'(x)} = \frac{\mathbf{2} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{1}) \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{1}) - (\mathbf{x}-\mathbf{1})^2}{(\mathbf{x}+\mathbf{1})^2} = \frac{\mathbf{x}^2 + \mathbf{2x} - \mathbf{3}}{(\mathbf{x}+\mathbf{1})^2} \; => f'(x) = \mathbf{0} \; =>$$

$$\mathbf{x}^2 + \mathbf{2x} - \mathbf{3} = \mathbf{0} \; => x = \frac{-\mathbf{2} \pm \sqrt{\mathbf{4}+\mathbf{12}}}{\mathbf{2}} = \frac{-\mathbf{2} \pm \mathbf{4}}{\mathbf{2}}$$
$$= \begin{cases} x = \mathbf{1} \\ x = -\mathbf{3} \end{cases} \boldsymbol{posibles \; max, min}$$

$$\boldsymbol{f''(x)} = \frac{(\mathbf{2}x+\mathbf{2}) \cdot \; (\mathbf{x}+\mathbf{1})^2 - (\mathbf{x}^2 + \mathbf{2x} - \mathbf{3}) \cdot \mathbf{2} \cdot \; (\mathbf{x}+\mathbf{1})}{(\mathbf{x}+\mathbf{1})^3} = \frac{\mathbf{8}}{(\mathbf{x}+\mathbf{1})^3}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{f''(1)} = \dfrac{+}{+} > 0 \;\; \textit{mínimo en } (1{,}0) \\ \boldsymbol{f''(-3)} = \dfrac{+}{-} < 0 \;\; \textit{máximo en } (-3, -8) \end{cases}$$

Existen los intervalos de monotonía (-∞,-3),(-3,-1),(-1,1),(1, ∞) que hay que estudiar:

$$\begin{cases} (-\infty, -\mathbf{3}) \; ; \;\; \mathbf{x} = -\mathbf{4} \;\; => y'(-\mathbf{4}) = \dfrac{\mathbf{16}-\mathbf{8}-\mathbf{3}}{\mathbf{9}} = \dfrac{+}{+} > \mathbf{0} \;\; \boldsymbol{Creciente} \\ (-\mathbf{3}, -\mathbf{1}) \; ; \;\; \mathbf{x} = -\mathbf{2} \;\; => \;\; y'(-\mathbf{2}) = \dfrac{\mathbf{4}-\mathbf{4}-\mathbf{3}}{\mathbf{1}} < \mathbf{0} \;\; \boldsymbol{Decreciente} \\ (-\mathbf{1}, \mathbf{1}) \; ; \;\; \mathbf{x} = \mathbf{0} \;\; => \;\; y'(\mathbf{0}) = \dfrac{-\mathbf{3}}{\mathbf{1}} < \mathbf{0} \;\; \boldsymbol{Decreciente} \\ (\mathbf{1}, \infty)\mathbf{x} = \mathbf{2} \;\; => \;\; y'(\mathbf{2}) = \dfrac{\mathbf{4}+\mathbf{4}-\mathbf{3}}{\mathbf{1}} > \mathbf{0} \;\; \boldsymbol{Creciente} \end{cases}$$

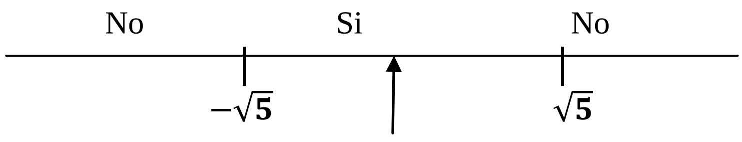
$$\textbf{Tratamos ahora de hacer } \mathbf{y''} = \; \mathbf{0} \; ; \; \frac{\mathbf{8}}{(\mathbf{x}+\mathbf{1})^3} = \mathbf{0} \;\; ; \;\; \nexists \, \mathbf{x} => \; \nexists \, \mathbf{P.I}$$

El único valor que divide la recta real es donde no está definida es decir en x = - 1

Para todo x < -1 y´´< 0 la f(x) tiene ramas hacia abajo
Para todo x > -1 y´´> 0 la f(x) tiene ramas hacia arriba

Dada la función y = x· $\sqrt{5-\ x^2}$, se pide: Dominio y corte con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

y = x· $\sqrt{5-\ x^2}$ D: 5 - $x^2 > 0$; x^2 = 5 ; x = $\pm\sqrt{5}$;



D: (-$\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$)

x = 0 y = 0 ·$\sqrt{5}$ = 0

$$\textbf{Corte eje OX}\begin{cases} \mathbf{y}\ = \mathbf{x}\cdot\sqrt{5-\ x^2} \\ \mathbf{y}=\mathbf{0}\end{cases} => \ \mathbf{x}\cdot\sqrt{5-\ x^2}=\mathbf{0} = >$$

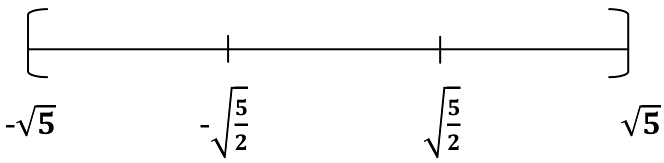
$$=>\begin{cases} \mathbf{x}=\mathbf{0} \\ 5-\ x^2=0\ ;\ x^2=5\ ; x=\ \pm\sqrt{5}\end{cases}$$

Los puntos de corte son: (0,0), ($\sqrt{5}$, 0), (-$\sqrt{5}$,0)

$$\textbf{Corte eje OY}\begin{cases} \mathbf{y}\ =\ \mathbf{x}\cdot\sqrt{5-\ x^2} \\ \mathbf{x}=\mathbf{0}\end{cases}\quad \mathbf{y}=\mathbf{0}\quad \textbf{corte en } (\mathbf{0},\mathbf{0})$$

$$\mathbf{y}'\ =\ \sqrt{5-\ x^2}+\mathbf{x}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{5-\ x^2}}\ =\ \frac{5-x^2-x^2}{\sqrt{5-\ x^2}}$$
$$=\ \frac{5-2x^2}{\sqrt{5-\ x^2}}$$

$$\mathbf{y}'\ =\ \mathbf{0}\ ;\ \ 5\ -\ 2x^2\ =\ 0\ ;\ \ 2x^2\ =\ 5\ ;\ \ \mathbf{x}\ =\ \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$



$$\begin{cases} \left(-\sqrt{5}\,,-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\ ;\ \ x=-2\ \ ;\ \ y'(-2)<0\textit{Decreciente} \\ \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\,,\sqrt{\frac{5}{2}}\ \right)\ ;\ \ x=0\ \ ;\ \ y'(0)>0\ \ \textit{Creciente} \\ \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\,,\sqrt{5}\right)\ ; x=2\ \ ;\ \ y'(2)<0\ \ \textit{Decreciente}\end{cases}$$

Dada $y = x^2 \cdot e^x$ .Calcular sus asíntotas.

Dominio: $\forall x \in R$ ya que x^2 y e^x están siempre definidas, $\nexists$ A.V

$\nexists$ x $\in$ R tal que y → +∞.   No existe A.V

$$\boldsymbol{A.H}:\ \boldsymbol{y} = \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{x^2 \cdot e^x} = \infty^2 \cdot e^{\infty} = \infty \cdot \infty = \infty \quad \nexists\ \boldsymbol{AH}$$

$$\boldsymbol{y} = \lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x = (-\infty)^2 \cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0 \ \Rightarrow\ y = 0\ \ AH$$

$$\boldsymbol{A.O}:\ m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} x \cdot e^x = \infty \cdot e^{\infty} = \infty \cdot \infty = \infty \quad \nexists\ AO$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \cdot e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^x = -\infty \cdot 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \frac{-\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0 \quad \nexists\ AO$$

Dada y = 3 sen x – sen 3x hallar intervalos de monotonia

Dominio: $\forall x \in R$ por ser funciones sinusoidales

$$\boldsymbol{Monoton\acute{i}a}:\ y' = 3\cos x - 3\cos 3x\ ;\ y' = 0\ ;\ 3\cos x = 3\cos 3x\ ;\ \cos x = \cos 3x$$

$$\begin{cases} x = 0\ ;\ \cos 0 = \cos 3 \cdot 0 = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{2}\ ;\ \cos\dfrac{\pi}{2} = \cos\dfrac{3\pi}{2} = 0 \\ x = \pi\ ;\ \cos\pi = \cos 3\pi = -1 \end{cases} \qquad \textit{Posibles máximos y mínimos}$$

----[-----------------x---------------------]---
0 π / 2 π

$$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ \ x=\frac{\pi}{4}\ \ ;\ \ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$>0\ \ \textit{Creciente}$$

$$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\ \ x=\frac{3\pi}{4}\ \ ;\ \ y'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=3\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-3\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
$$>0\ \ \textit{Decrec}$$

$\textit{Dada } y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ ***hallar intervalos de monotonía, máxi − mos y minimos.***

El Dominio de $\sqrt[3]{u(x)}$ esta definido $\forall$ x $\in$ R, pero como esta en el denominador,

$$si\ \ \exists x \mid x^2-1=0\ \ =>\ \ x^2=1\ \ =>x=\pm 1,\ \textit{para esos valores no estara de}-$$

$$\textit{finida la función y el } D=R-\{\mathrm{x}\ =\ \pm 1\}$$

$$\textit{Monotonía}:\ y=x\cdot(x^2-1)^{-\frac{1}{3}};\ \ y'=\ (x^2-1)^{-\frac{1}{3}}+x\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x$$

$$\mathrm{y}'=\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{x}^2-1}}-\frac{2\mathrm{x}^2}{3\cdot\sqrt[3]{(\mathrm{x}^2-1)^4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{x}^2-1}}-\frac{2\mathrm{x}^2}{3\cdot(\mathrm{x}^2-1)\cdot\sqrt[3]{\mathrm{x}^2-1}}=$$

$$=\frac{3\cdot(\mathrm{x}^2-1)-2\mathrm{x}^2}{3\cdot(\mathrm{x}^2-1)\cdot\sqrt[3]{\mathrm{x}^2-1}}=\frac{\mathrm{x}^2-3}{3\cdot(\mathrm{x}^2-1)\cdot\sqrt[3]{\mathrm{x}^2-1}}\ \ ;\ \ y'=0=>\mathrm{x}^2-3=0$$

$$x^2=3\ \ =>\ \ x=\pm\sqrt{3}$$

( )( )( )( )( )

- ∞ -√3 -1 1 √3 + ∞

$$\begin{cases} \left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\ ;\ x=-2\ ;\ y'(-2)=\dfrac{4-3}{+\cdot\sqrt{+}}=\dfrac{+}{+}>0\ \ Creciente \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad M\acute{a}ximo\ en\ \left(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right) \\ \left(-\sqrt{3},-1\right)\ ;\ x=-1'5\ ;\ y'(-1'5)=\dfrac{2'25-3}{+\cdot\sqrt{+}}=\dfrac{-}{+}<0\ \ Decreciente \\ (-1,1)\ ;\ x=0\ ;\ y'(0)=\dfrac{-3}{+\cdot\sqrt{+}}=\dfrac{-}{+}<0\ \ Decreciente \\ \left(1,\sqrt{3}\right)\ ;\ x=1'5\ ;\ y'(1'5)=\dfrac{2'25-3}{+\cdot\sqrt{+}}=\dfrac{-}{+}<0\ \ Decreciente \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad M\acute{i}nimo\ en\ \left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right) \\ \left(\sqrt{3},\infty\right)\ ;\ x=2\ ;\ y'(2)=\dfrac{4-3}{+\cdot\sqrt{+}}=\dfrac{+}{+}>0\ \ Creciente \end{cases}$$

Dada y = $\frac{x^2}{x^2-x-6}$ calcular asíntotas, intervalos de monotonía y máximos y mínimos.

Dominio: $x^2-x-6=0\ ;x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}3\\-2\end{cases}$

D = R – { x = 2, x = 3} = ∀ x ∈ (- ∞, - 2) ∪ (- 2, 3) ∪ (3, ∞)

$A.V:\ \begin{cases}x=-2\\x=3\end{cases}\ hacen\ que\ y\to\infty$

$A.H:\ y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-x-6}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2}=1\ ;\ \ y=1\ es\ AH$

$A.O:\ m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^3-x^2-6x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{3x^2-2x-6}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{6x-2}=$

$=\dfrac{2}{\infty}=0\ \ \nexists\ AO$

Monotonía: $y'=\dfrac{2x(x^2-x-6)-x^2(2x-1)}{(x^2-x-6)^2}=\dfrac{2x^3-2x^2-12x-2x^3+x^2}{(x^2-x-6)^2}=$

$=\dfrac{-x^2-12x}{(x^2-x-6)^2}\ ;\ \ y'=0\Rightarrow\ -x^2-12x=0\ ;\ -x\cdot(x+12)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-12\end{cases}$

$$\begin{cases} (-\infty, -12)\ ;\ y'(-20) = \dfrac{-400+240}{+} < 0\ \ \textit{Decreciente} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{Minimo en}\ \left(-20, \dfrac{400}{414}\right) \\ (-12, -2)\ ;\ y'(-10) = \dfrac{-100+120}{+} > 0\ \ \textit{Creciente} \\ (-2, 0)\ ;\ y'(-1) = \dfrac{-1+12}{+} > 0\ \ \textit{Creciente} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{Máximo en}\ (0, 0) \\ (0, 3)\ ;\ y'(1) = \dfrac{-1-12}{+} < 0\ \ \textit{Decreciente} \\ (3, \infty)\ ;\ y'(10) = \dfrac{-100-120}{+} < 0\ \ \textit{Decreciente} \end{cases}$$

Creciente : $\forall x \in (-12,\ 2) \cup (-2,\ 0) \cup (3,\ \infty)$

Decreciente: $\forall x \in (-\infty,\ -12) \cup (0,\ 3)$

Determinar los intervalos de monotonía y hallar máximos y mínimos de $y = 3\cdot x^5 + 5\cdot x^3 - 30\cdot x$

El dominio es toda la recta real por ser un polinomio de grado 5

Busquemos los valores de $y'(x) = 0$

$$y' = 15\cdot x^4 + 15\cdot x^2 - 30 \ => x^4 + x^2 - 2 = 0 = \\ > \begin{cases} x^2 = z \\ x^4 = z^2 \end{cases} => \ z^2 + z - 2 = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \quad => \quad x^2 = 1 \quad => \quad x = \pm 1 \\ -2 \quad => \quad x^2 = -2 \quad => \quad \nexists\, x \end{cases}$$

Dividimos toda la recta real en tres intervalos

(————————x————————x————————)
- ∞ - 1 + 1 + ∞

$$\begin{cases} (-\infty, -1)\ \ x = -2 \ \Rightarrow\ y'(-2) = \ 15 \ \cdot\ 4 \ +\ 15 \ \cdot\ 2 - 20 \ > \ 0 \quad \textit{Creciente} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{Max}\ (-1, 22) \\ (-1, +1)\ \ x \ = \ 0 \ \Rightarrow\ y'(0) = \ -30 \ < \ 0 \qquad\qquad \textit{Decreciente} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{Min}\ (1, 22) \\ (+1, +\infty)\ x \ = \ 1 \ \Rightarrow\ y'(1) = \ 15 \ \cdot\ 4 \ +\ 15 \ \cdot\ 2 - 20 \ > \ 0 \quad \textit{Creciente} \end{cases}$$

Dada y = 3. e^{x^2-4x} **intervalos de monotonía, máximos y mínimos**

Dominio: como y = $\mathbf{x^2 - 4x}$ está definida $\forall$x $\in$R, la función exponencial también lo estará

Monotonía:

y´ = 3 · (2x - 4) · $e^{\mathbf{x^2-4x}}$; y´ = 0

$$(\mathbf{6x-12}) \cdot e^{\mathbf{x^2-4x}} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{6x-12=0} \Rightarrow x = 2 \\ e^{\mathbf{x^2-4x}} = \mathbf{0}\,;\ \mathbf{ln}\, e^{\mathbf{x^2-4x}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x^2-4x} = -\infty\,, \nexists\, \mathbf{x} \end{cases}$$

Sólo x = 2 es posible máximo o mínimo

(-∞, 2) x = 0 y´(0) = - 12 $\mathbf{e^0}$ < 0 => Decreciente $\forall$x $\in$ (-∞, 2)
(2, ∞) x = 4 y´(4) = 3 $\mathbf{e^0}$ > 0 => Creciente $\forall$x $\in$ (2, ∞)

Mínimo (2, 3$\mathbf{e^{-4}}$) = $\left(\mathbf{2}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{e^4}}\right)$

Determinar los intervalos de curvatura y hallar los puntos de inflexión $\boldsymbol{de\ y = e^{-x^2}}$

El dominio es todo x ∈ R ya que la funcion exponencial esta definida en los valores en los quer lo están su exponente y aquí es un polinomio de grado 2.

$$\boldsymbol{y}' = -2\boldsymbol{x}\cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{x}^2}\ ;\ \ \mathbf{y}'' = -2\cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{x}^2} + 4\mathbf{x}^2\cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{x}^2} = (4\mathbf{x}^2-2)\cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{x}^2}$$

$$\boldsymbol{Como\ la\ y''(x) = 0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^{-\mathbf{x}^2} = \mathbf{0} \Rightarrow \nexists\, x \\ 4\mathbf{x}^2 - 2 = 0 \Rightarrow 4\mathbf{x}^2 = 2 \Rightarrow \mathbf{x}^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Para estudiar los intervalos de curvatura, dividimos toda la recta real (Dominio) en sus dos posibles valores de $\boldsymbol{x} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

)x( )x(

$-\infty$ $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ $+\sqrt{\frac{1}{2}}$ $+\infty$

$$\begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\ ; \boldsymbol{x} = -\mathbf{1} \Rightarrow y''(-\mathbf{1}) = +\cdot + > 0\ ramas\ hacia\ arriba \\ \boldsymbol{P.I}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\ ; \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Rightarrow y''(\mathbf{0}) = -\cdot + < 0\ ramas\ hacia\ abajo \\ \boldsymbol{P.I}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty\right)\ ; \mathbf{x} = \mathbf{1} \Rightarrow y''(\mathbf{1}) = +\cdot + > 0\ ramas\ hacia\ arriba \end{cases}$$

Determinar los intervalos de curvatura y hallar los puntos de inflexión de y = x^2 · Ln x

$$\boldsymbol{Dominio}: \begin{cases} \boldsymbol{y = x^2\ esta\ definido} \ \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{y} = \ln \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{esta\ definido}\ \forall\, \boldsymbol{x} \in (\mathbf{0}, \infty) \end{cases} \Rightarrow y = \boldsymbol{x^2}\cdot \ln \boldsymbol{x}\quad \boldsymbol{D}: \forall\, \boldsymbol{x} \in (\mathbf{0}, \infty)$$

Para estudiar la curvatura $y''(x_0) = 0$

$y' = 2x \cdot \text{Ln } x + x^2 \cdot 1 / x = x + 2x \cdot \text{Ln } x$

$y'' = 1 + 2 \cdot \text{Ln}\, x + 2x \cdot 1/x = 3 + 2 \cdot \text{Ln}\, x$

$y'' = 0 \;\Rightarrow\; 3 + 2 \cdot \text{Ln}\, x = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot \text{Ln}\, x = -3 \;\Rightarrow\; \text{Ln}\, x = -3/2$

$e^{\text{Ln}\, x} = e^{-3/2} \;\Rightarrow\; x = e^{-3/2}$

Para estudiar los intervalos de curvatura se toma el dominio y se incluye el posible P.I

$$\begin{array}{lll} (&)x(& \\ 0 & e^{-3/2} & +\infty \end{array}$$

$(0, e^{-3/2})$ $x = 0{,}01$ $\Rightarrow$ $y''(0{,}01) = 3 + 2 \cdot \text{Ln}\,(0{,}01) < 0$ ramas hacia abajo

$(e^{-3/2}, \infty)$ $x = 1$ $\Rightarrow$ $y''(1) = 3 + 2 \cdot \text{Ln}\, 1 > 0$ ramas hacia arriba.

Como en $x = e^{-3/2}$ aparece un cambio de curvatura $\Rightarrow$

Hay un P.I en $(e^{-3/2}, -3/2 \cdot e^{-3})$

Determinar los intervalos de curvatura y hallar los puntos de inflexión de y = x – sin x en el [-π, π]

El dominio es toda la recta real ya que y = x es un polinomio e y = sin x es una función sinusoidal, por lo que estará definida en $[-\pi, \pi]$

Calculemos la y''

$$\boldsymbol{y' = 1 - \cos x} \;;\; \boldsymbol{y'' = \sin x} \;=>\; y'' = 0 \;;\; \boldsymbol{\sin x = 0} \;=>\; x = \begin{cases} \boldsymbol{x = -\pi} \\ \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{x = \pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} [-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{0}) \;\; \boldsymbol{x = -\frac{\pi}{2}} \;=>\; y'' = \boldsymbol{\sin}\left(-\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\right) = \boldsymbol{-1} < 0 \;\; \textit{ramas hacia abajo} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{P.I}\;(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \\ (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\pi}] \;\; \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}} \;=>\; y'' = \boldsymbol{\sin}\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\right) = \boldsymbol{1} > 0 \;\; \textit{ramas hacia arriba} \end{cases}$$

En los extremos $x = \pi$ y $x = -\pi$ hay P.I aunque no los podemos asegurar.

Determinar los intervalos de monotonía y hallar máximos y mínimos de y = Ln (x² + 3x + 2)

La función está definida para los valores de x en los que $x^2 + 3x + 2 > 0$

Resuelvo $x^2 + 3x + 2 = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \boldsymbol{x = -2} \\ \boldsymbol{x = -1} \end{cases}$

Busquemos los intervalos en los que esta definida

$$\begin{array}{lllll} (& x & x &) \\ -\infty & -2 & -1 & +\infty \end{array}$$

(-∞ , -2)   x = - 3   ➔   y(- 3) = Ln (9 – 9 + 2) = Ln 2   Si hay curva.

(-2 , -1)   x = - 1,5   ➔ y(- 1,5) = Ln (2,25 – 4,5 + 2) = Ln (- 0,25)   No hay curva

(-1, +∞)   x = 0   ➔ y(0) = Ln 2   Si hay curva

Dominio : x ε (-∞ , -2) ∪ (-1, +∞)

Para buscar los intervalos de monotonía, calculemos la y´

$$\boldsymbol{y' = \frac{2x+3}{x^2+3x+2}} \;=> y' = 0 => \;2x+3 = 0 => x = -\frac{3}{2}\;\; \boldsymbol{no\; \in D}$$

Estudiamos los mismos intervalos que los de dominio pero con la y´

$$\begin{cases} (-\infty\,, \boldsymbol{-2})\;\; \mathbf{x\; = \;-3} \;\; \boldsymbol{\Rightarrow}\;\; \mathbf{y'(-3) =}\; \boldsymbol{\frac{-}{+} < 0\;\; Decreciente} \\ \quad (\boldsymbol{-1}, +\infty)\;\; \mathbf{x\; = \;\; 0} \;\; \boldsymbol{\Rightarrow}\;\; \mathbf{y'(0)} \; = \boldsymbol{\frac{+}{+} > 0\;\; Creciente} \end{cases}$$

Determinar los intervalos de monotonía y hallar máximos y mínimos

$$\boldsymbol{de\; y = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}}$$

El denominador no se anula nunca ya que $x^2 + 8$ nunca puede ser nulo ni negativo.

El dominio es toda la recta real.

$$\boldsymbol{Calculemos\; la\; y' = \frac{-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+8)^{-1/2}\cdot 2x}{((x^2+8)^{1/2})^2} = \frac{-4x}{(x^2+8)^{3/2}}}$$

y´= 0 ➔   - 4x = 0   ➔ x = 0 es el posible max o min y el valor de x que separa el intervalo de monotonia en dos

$$\begin{cases} (-\,\infty, \boldsymbol{0})\;\; \mathbf{x\; = \;-1} \;\boldsymbol{\Rightarrow}\; \mathbf{y'(-1) =}\; \boldsymbol{\frac{+}{+} > 0\;\; Creciente} \\ \qquad\qquad \boldsymbol{M\acute{a}ximo\; en\; (0, \sqrt{2})} \\ \quad (\boldsymbol{0}, +\infty)\;\; \mathbf{x\; = \;\; 1} \;\;\boldsymbol{\Rightarrow}\; \mathbf{y'(1)} = \boldsymbol{\frac{-}{+} < 0\;\; Decreciente} \end{cases}$$

Determinar los intervalos de monotonía y hallar máximos y mínimos de   y = x - Ln (1 + x)

El Dominio de la función sera el que posea el logaritmo

1 + x > 0 ➔   x > - 1   es decir Dominio: x ∈ (- 1, ∞)

$$Calculemos\ y' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}\ ;\ \ y' = 0 =>$$

$x = 0\ posible\ máx, min$ (x)

-1 0 $+\infty$

$$\begin{cases} (-1,0)\ \ \mathbf{x} = -0,5 \ \Rightarrow\ \mathbf{y}'(-0,5) = \frac{-}{+} < 0\ \ Decreciente \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Minimo\ en\ (0,0) \\ (0,+\infty)\ \ \mathbf{x} = 1 \ \Rightarrow\ \mathbf{y}'(1) = \frac{+}{+} > 0\ \ Creciente \end{cases}$$

Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones, estudiando los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

a) $\mathbf{y = x \cdot e^{x}}$ **b)** $\mathbf{y = x \cdot e^{-2x}}$

a) $y = x \cdot e^x$ D = R Por serlo x y por serlo e^x

$y' = e^x + x \cdot e^x = (1+x)\,e^x$; $y' = 0$; $(1+x)\,e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{1 + x = 0\ ;\ \ x = -1} \\ \mathbf{e^{x} = 0\ ;\ \nexists x \in R} \end{cases}$

$y'' = e^x + (1+x)\,e^x = e^x\,(1+1+x) = e^x \cdot (2+x)$

$y''(-1) = e^{-1}(2-1) > 0$ Mínimo (-1, - 1/ e)

$$\begin{cases} (-1,\infty)\ \ \mathbf{x = 0}\ \ \mathbf{y'(0) = (1+0)\cdot e^{0}} > 0\ Creciente \\ (-\infty,-1)\ \ \mathbf{x = -2}\ \ \mathbf{y'(-2) = (1-2)\cdot e^{-2}} < 0\ Decreciente \end{cases}$$

b) $y = x \cdot e^{-2x}$

D = R Por serlo x y por serlo e^{-2x}

$y' = e^{-2x} + x(-2)\,e^{-2x} = e^{-2x}(1-2x)$; $y' = 0 => \begin{cases} \mathbf{e^{-2x} = 0 \quad \nexists\, x \in R} \\ \mathbf{1 - 2x = 0\ ;\ x = \frac{1}{2}} \end{cases}$

$y'' = -2\,e^{-2x}(1-2x) + e^{-2x}(-2) = e^{-2x}(-2+4x-2) = (4x-4)\,e^{-2x}$

$y''(½) = (4 \cdot ½ - 4)\,e^{-1} < 0$ Max en $(1/2\ ,\ 1/2 \cdot e^{-1}) = (1/2\ ,\ 1/2\,e)$

(- ∞, ½) x = 0 y ´(0) = e^{0} (1 – 0) > 0 Creciente

(1/2, ∞) x = 1 y ´ (1) = e^{-2} (1 - 2) < 0 Decreciente

Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones, estudiando los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

a) y = x ln x ; b) = x e^{-x}

a) D : ∀x > 0 pues sino el Ln x no estaría definido

$$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \;;\; y' = 0 \Rightarrow \ln x = -1;\; e^{\ln x} = e^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$y'' = \frac{1}{x} \;;\; y''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{1/e} = e > 0 \;\; Min\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$$

$$\begin{cases} \left(0, \frac{1}{e}\right) & x = 0'01 \;;\; y'(0'01) = \ln 0'01 + 1 < 0 \quad Decreciente \\ \left(\frac{1}{e}, \infty\right) & x = e \;;\; y'(e) = \ln e + 1 > 0 \quad \textbf{Creciente} \end{cases}$$

b) D = R pues e^{-x} está definida para todo x ∈ R

y´= e^{-x} + x (-1) e^{-x} = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x) e^{-x}

$$y' = 0 \begin{cases} 1 - x = 0 \;;\; x = 1 \;\; \textbf{posible max o min} \\ e^{-x} = 0 \quad \nexists x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

y´´ = - 1 e^{-x} + (1- x) (-1) e^{-x} = - e^{-x} - (1 – x) e^{-x} = e^{-x} (-1 - 1 + x)

y´´ = (x - 2) e^{-x}; y´´ (1) = (1 - 2) e^{-1} < 0 Max (1, 1/e)

$$\boldsymbol{Monotonia}: \begin{cases} (-\infty, \mathbf{1}) \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}\,; \ \mathbf{y}'(\mathbf{0}) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{0}} > \mathbf{0} \quad \boldsymbol{Creciente} \\ (\mathbf{1}, \infty) \quad \mathbf{x} = \mathbf{2}\,; \ \mathbf{y}'(\mathbf{2}) = -\mathbf{1} \cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{2}} < \mathbf{0} \ \boldsymbol{Decreciente} \end{cases}$$

Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones, estudiando los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$y = 1 + 2x - x^2$ $\qquad$ $y = 2 \cdot x^{1/3}$

$y = 1 + 2x - x^2$

D = R $\qquad$ por ser función polinómica

$y' = 2 - 2x$; $y' = 0$ $\quad$ $2 - 2x = 0$; $\quad x = 1$

$y'' = -2$; $y''(1) < 0$ $\quad$ Máximo (1,2)

------)-(---------
1

$(-\infty, 1)$ $\quad$ $x = 0$ $\quad$ $y'(0) = 2 - 0 > 0$ $\quad$ Creciente

$(1, \infty)$ $\quad$ $x = 2$ $\quad$ $y'(2) = 2 - 4 < 0$ $\quad$ Decreciente

$y = 2 \cdot x^{1/3} \implies y = 2 \cdot \sqrt[3]{x} \quad D: R \quad por\ ser\ raiz\ impar$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \ ; \ y' = 0 \implies \nexists x \in R \ \ ya\ que\ 2 \neq 0$$

$$(-\infty, \infty) \quad x = 1 \qquad y'(1) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{1} > 0 \ \ Creciente$$

Hallar los máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y $\boldsymbol{decrecimiento\ de\ la\ funci\acute{o}n\ f(x) = 3 \cdot e^{x^2-4x}}$

$f(x) = 3e^{x^2-4x}$ $\quad f'(x) = 3 \cdot (2x-4) \cdot e^{x^2-4x}$ Como la exponencial no se anula nunca

si f'(x) = 0 $\rightarrow$ 2x - 4 = 0 $\rightarrow$ x = 2 $\quad f''(x) = 6\ e^{x^2-4x} + (6x-12)(2x-4)e^{x^2-4x}$

Para x = 2 en el que f '(2) = 0 $\rightarrow$ f ''(2) = 6e^{-4} = $\frac{6}{e^4} \neq \mathbf{0}$ y positiva (>0).

Para x = 2 la primera derivada no nula es de orden par (k = 2) con lo que la función no es creciente ni decreciente.

Como y''(2) > 0 $\rightarrow$ $\exists$ un mínimo en x = 2 , $y = 3e^{-4}$ es decir para $\left(\mathbf{2}, \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{e}^{\mathbf{4}}}\right)$ existe un mínimo.

Para x < 2 $\rightarrow$ $y = + \cdot - \cdot e^{x^2-4x} = + \cdot - \cdot + \rightarrow y' < 0$ luego decreciente para x < 2.

Para x > 2 $\rightarrow$ $y' = + \cdot + \cdot + \Rightarrow y' > 0 \neq 0$ luego es creciente para x > 2.

Hallar los máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

$f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ la f(x)no está definida para x = - 3.

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x+3)^2}$ si f'(x) = 0 $\rightarrow \nexists$ x $\rightarrow \nexists$ max ni min

Pues no hay ningún valor que haga la derivada primera nula.

$\forall x \neq 3$ que es el único punto en donde puede existir variación la f'(x) < 0 ; $\forall x \neq 3$

es estrictamente decreciente.

La virulencia de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresado por 40 + 15t -9t^2 + t^3, donde t es el tiempo en horas, transcurrido desde que comenzó el estudio (t=0). Indicar los instantes de máxima y mínima virulencia en las 6 primeras horas y los itinerarios en que esta crece o decrece.

La ecuación de la virulencia es $V = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$

El máximo o mínimo aparecerá para V´=0

$V` = 15 - 18t + 3t^2$ V´= 0 $\rightarrow 3t^2 - 18t + 15 = 0$; $t^2 - 6t + 5 = 0$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5\ horas \\ 1\ hora \end{cases}$$

Para ver cuándo es máxima o mínima la virulencia

$$V´´ = 6t - 18;\ \begin{cases} V´´(5) = 6 \cdot 5 - 18 > 0 \quad \textit{mínimo de virulencia para } t = 5\ horas \\ V´´(1) = 6 \cdot 1 - 18 < 0 \quad \text{máximo de virulencia para t} = \text{1hora} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{En el intervalo } (0,1)\ \ x = 0{,}5\ \ V´(0{,}5) = 15 - 18.(0{,}5) + 3 \cdot (0{,}5)^2 \ \text{Creciente} \\ \text{En el intervalo } (1,5)\ \ x = 2;\ V´(2) = 15 - 18 \cdot (2) + 3 \cdot (2)^2 \ \text{Decreciente} \\ \text{En el intervalo } (5,6)\ \ x = 5{,}5;\ V´(5{,}5) = 15 - 18 \cdot (5{,}5) + 3 \cdot (5{,}5)^2 \ \text{Creciente} \end{cases}$$

Obtener máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = x \cdot (Lnx)^2$ (Selectividad Junio 2007-08)

El dominio son los valores de x que hacen que $\exists$ Ln(x).

Solo los $x > 0$ poseen Ln(x) , $\forall x \leq 0 \ \nexists$ Ln(x).

$D = \forall\ x > 0$, $D = \forall\ x \in (0, \infty)$

$f'(x) = (\text{Ln } x)^2 + (x) \cdot (2) \cdot (\text{Ln } x) \cdot (1/x) = (\text{Ln } x)^2 + 2 \text{ Ln } x$

$f'(x) = 0$, $(\text{Ln } x)^2 + 2 \text{ Ln } x = 0$, $\text{Ln } x \cdot [x+2]=0$ $\begin{cases} \mathbf{Ln\ x = 0} \\ \mathbf{Ln\ x = -2} \end{cases}$

Para Ln x = 0 ----> $e^{\text{Ln } x} = e^{0}$, x = 1 Es posible Máximo o Mínimo

Para Ln x = - 2 -----> $e^{\text{Ln } x} = e^{-2}$, x = - 2 También es posible.

$y'' = 2 \cdot (\text{Ln}x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + (2) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{2}{x}\right) \cdot [\text{Ln}x + 1]$

$y''(1) = 2/1 \cdot [\text{Ln}1 + 1] > 0$ MIN (1, 0)

$$\boldsymbol{y''}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^2}}\right) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}/\boldsymbol{e^2}} \cdot (\mathbf{ln}\,\boldsymbol{e^{-2}} + \mathbf{1}) < 0 \quad MAX \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^2}}, \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{e^2}}\right)$$

Posibles P.I.

$y'' = 0$, $\frac{2}{x} \cdot [\text{Ln } x + 1] = 0$ -----> $\text{Ln } x + 1 = 0$, $\text{Ln } x = -1$

$e^{\text{Ln } x} = e^{-1}$, $x = \frac{1}{e}$ Posible P.I

intervalos de

curvatura. $\begin{cases} \left(0, \frac{1}{e}\right) \ ; \ x = \frac{1}{e^2} \ ; \ y'' \left(\frac{1}{e^2}\right) = e^2 \cdot (-2 + 1) < 0 \ \ hacia\ abajo \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad P.I \ \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right) \\ \left(\frac{1}{e}, \infty\right) \ ; x = e \ ; y''(e) = \frac{2}{e} \cdot (\ln e + 1) > 0 \ hacia\ arriba \end{cases}$

Obtener PI e Intervalos de curvatura de $y = x^2 \cdot \ln x$

$$Dominio: \begin{cases} y = x^2 \ \ definido \ \forall \ x \ \in R \\ y = \ln x \ \ definido \ \forall \ x > 0 \end{cases} \qquad D: \ \forall \ x > 0$$

Curvatura:

$$y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x \ ; \ \ y'' = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \cdot \ln x + 3$$

$$y'' = 0 => \ 2 \cdot \ln x + 3 = 0 \ ; \ \ln x = -\frac{3}{2} \ ; \ e^{\ln x} = e^{-3/2} \ \ => x = e^{-3/2} \ , posible\ PI$$

$$\begin{cases} \left(0, e^{-3/2}\right) \ x = 0,1 \ \ y''(0,1) = 2 \cdot \ln(0,1) + 3 < 0 \ \ ramas\ hacia\ \ abajo \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad P.I \ \left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2} e^{-3}\right) \\ \left(e^{-3/2}, \infty\right) \ x = 1 \ \ y''(1) = 2 \cdot \ln 1 + 3 > 0 \ \ ramas\ hacia\ arriba \end{cases}$$

¿Podría explicar el concepto de máximo relativo de una función y su diferencia con el de máximo absoluto?.

Diremos que f(x) posee un máximo relativo en x = a, si existe un entorno de (a, E(a)), tal que para todo valor de x perteneciente a dicho entorno, se verifica que $f(x) \leq f(a)$

Diremos que f(x) posee un máximo absoluto en un intervalo perteneciente al dominio de nuestra función, si para todo valor de x perteneciente al intervalo, se verifica que $f(x) \leq f(a)$.

La diferencia está en que el máximo absoluto es el mayor de todos los máximos relativos existentes en el intervalo definido.

Razonar ***porque la gráfica de la función y = 2x + cos x no puede presentar extremos relativos.***

Entendiendo por extremos relativos, a los máximos y mínimos de la función y sabiendo que la condición necesaria para la existencia de máximos y mínimos de una función, es que su y' valga 0, podemos buscar en nuestra función, si existe o no algún valor de x que satisfaga la condición.

$y = 2x + \cos x \implies y' = 2 - \sin x$ y como la $y'(x) = 0$ $\quad 2 - \sin x = 0 \implies$

$\sin x = 2$. Esto es imposible para ningún ángulo, ya que el seno de un ángulo se

encuentra siempre acotado entre los valores +1 y -1 y nunca podrá valer 2

Si la función f es creciente y derivable para todo valor de la variable independiente, ¿puede ser f '(x) = 0 en algún punto x?. ¿puede ser f '(x) < 0 en algún punto x ?.

Sabemos que si la función es creciente, se deberá cumplir que la $f'(x)$ sea > 0.

Ahora bien, en el caso de que exista un punto de inflexión con tangente horizontal, la f(x) puede ser creciente a la derecha y a la izquierda de dicho punto, siendo la $f'(x) = 0$ en dicho punto.

En cambio, la $f'(x)$ nunca podrá ser negativa para ningún valor de la variable x, ya que entonces la función seria decreciente.

Si la función f tiene derivadas primera y segunda y además f '(a) = 0 y f''(a) = 0, ¿puede presentar f un máximo relativo en el punto a?. En caso afirmativo, mostrar un ejemplo.

La función puede presentar un máximo relativo siempre que la $f'''(a) = 0$ y la $f^4(a) < 0$, es decir, siempre que la primera derivada particularizada distinta de cero sea de orden par

Por ejemplo $f(x) = -x^4$ ➔ la $f'(x) = -4x^3 = 0 \implies x = 0$

$f''(x) = -12x^2 \implies f''(0) = 0$

$f'''(x) = -24x \implies f'''(0) = 0$

$f^4(x) = -24 \implies f^4(0) < 0$

En nuestro caso, la primera derivada particularizada distinta de cero es de orden cuarto, luego en $x = 0$, existe un máximo relativo.

Además, la $f'(x)$ pasa de ser positiva antes de llegar a cero (creciente), a ser negativa después de cero (decreciente) ==> existe en $x = 0$ un máximo relativo.