MATEMATICAS. BC2 TEMA 9: Aplicaciones de las derivadas

1. Calcular los puntos en que la tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ es paralela al eje OX.
2. Una recta de pendiente 3 pasa por $(0,-2)$ y es tangente a $y=x^3$. Hallar el punto de tangencia.
3. Hallar los puntos de $f(x)=x^4+7x^3+13x^2+x+1$, donde la tangente forma 45º con el eje OX.
4. Dada $f(x)=\operatorname{tg} x$, halla el ángulo que forma la recta tangente en el origen con el eje de abscisas.
5. Calcular la ecuación de la tangente y de la normal a $f(x) = \ln \operatorname{tg} 2x$ en el punto $x = \pi/8$.
6. Hallar los coeficientes de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por $(0, 3)$ y por $(2, 1)$, y en este último punto su tangente tiene de pendiente 3.
7. La gráfica de $y=ax^2+bx+c$ pasa por los puntos $(2,3)$ y $(3,13)$, siendo la tangente a la misma en el punto de abscisa 1 paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Hallar el valor de a, b y c.
8. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determina a, b, c y d; sabiendo que la curva pasa por los puntos $(-1, 2)$ $(2, 3)$, y que las tangentes a ellas en los puntos de abscisa 1 y -2 son paralelas al ejes de abscisas.
9. ¿En qué punto de $y=\ln x$, la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1)$?
10. La ecuación de un movimiento circular es: $\varphi(t) = \frac{1}{2}t^2$. ¿Cuál es la velocidad y la aceleración angulares al cabo de siete segundos?
11. Un observador se encuentra a 2 km de la torre de lanzamiento de un cohete. Cuando despega verticalmente mide la variación del ángulo $\Phi(t)$ que forma la línea visual que le une con el cohete y la del suelo horizontal en función del tiempo transcurrido. Sabiendo que $\Phi'(t) = \Pi/3$:
    1. ¿Cuál es la altura del cohete cuando $\Phi = \Pi/3$ radianes?
    2. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando $\Phi = \Pi/3$ radianes?

12. Se bombea gas a un globo esférico a razón de $6m^3/min$. Si la presión se mantiene constante. ¿Cuál es la velocidad con la que cambia el radio del globo cuando el diámetro mide 120 cm?
13. Obtener el triángulo isósceles de área máxima inscrito en un círculo de radio 12 cm.
14. Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm, gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base para que el volumen del cono sea máximo?
15. Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?
16. Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea un mínimo.
17. Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.
18. Hallar las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un triángulo isósceles que tiene por base 10 cm y por altura 15 cm.
19. Hallar las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de paralelepípedo rectangular sabiendo que su volumen ha de ser 9 m^3, su altura 1 m y el coste de su construcción por m^2 es de 50 € para la base; 60 para la tapa y 40 para cada pared lateral.
20. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 x 50 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.
21. Una hoja de papel debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.
22. El beneficio neto mensual, en millones de euros, de una empresa que fabrica autobuses viene dado por: $B(x)= 1.2x - (0.1x)^3$ donde x es el número de autobuses fabricados en un mes.
    1. Calcula la producción mensual que hacen máximo el beneficio.
    2. El beneficio máximo correspondiente a dicha producción.

23. Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:
    1. La producción actual de la huerta.
    2. La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.
    3. La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.
    4. El número total de árboles de la huerta para qué la producción sea máxima.

24. Un sector circular tiene de perímetro 10 m. Calcula radio y amplitud del sector de mayor área.
25. El valor de un rubí es proporcional al cuadrado de su peso. Divide un rubí de 2 g en dos partes de forma que la suma de los valores de los dos rubíes formados sea mínima.
26. Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por por el punto (1, 2) aquella que forma con la partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima.
27. Una boya, formada por dos conos rectos de hierro unidos por sus bases ha de ser construido mediante dos placas circulares de 3 m de radio. Calcular las dimensiones de la boya para que su volumen sea máximo.

SOLUCIONES

Ejercicio 1:

$y' = 3x^2 - 6x - 9$; $x^2 - 2x - 3 = 0$ (simplificando por 3)
$x_1 = 3$ $y_1 = -22$; $x_2 = -1 y_2 = 10$; **A(3, −22) B(−1, 10)**

Ejercicio 2:

Sea el punto de tangencia (a, f(a)); $f'(x)= 3x^2 f'(a)= 3a^2$; $3a^2=3a = \pm 1$
Las ecuaciones de la rectas tangentes son: a = 1 f(a) = 1; $y-1=3(x-1)$; $y = 3x-2$; a = −1 f(a) = −1; $y + 1= 3(x + 1)$; $y = 3x + 2$; El punto (0, −2) pertenece a la recta $y=3x-2$
Por tanto el punto de tangencia será **(1, 1)**

Ejercicio 3:

m = 1; $f'(x) = 4x^3 + 21x^2 + 26x +1$; $4x^3 + 21x^2 + 26x +1 = 1$; x = 0 x = −2 x z= 13/4
P(0, 4) Q(−2, 4) R(13/4, 1621/256)

Ejercicio 4:

$f'(x) = 1 + tg^2\, x$ $f'(0) = 1 = m$ $y = x$ $\alpha = \text{arc tg } 1 =$ **45º**

Ejercicio 5:

$f(x)=\ln tg\, 2x$ $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\ln tg\, 2\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$ $f'(x)=\frac{2\left(1+tg^2 2x\right)}{tg\, 2x}$ $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2\left(1+tg^2 2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)}{tg\, 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}=4$

E. de la tangente: $y-0=4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ $4x-y-\frac{\pi}{2}=0$

E. de la normal: $y-0=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ $x+4y-\frac{\pi}{8}=0$

Ejercicio 6:

Pasa por (0, 3); 3 = c ; Pasa por (2, 1) 1= 4a + 2b + c ; $y' = 2ax + b$ 3 = 4a + b
Resolviendo el sistema se obtiene: **a = 2 b = −5 c = 3**

Ejercicio 7:

Pasa por (2, 3) 3 = 4a + 2b + c ; Pasa por (3, 13)13 = 9a + 3b +c
$y' = 2ax + b$ 1 = 2a + b Resolviendo el sistema se obtiene: **a = 3 b = −5 c =1**

Ejercicio 8:

f(−1) = 2 −a + b − c + d = 2 ; f(2) = 3 8a + 4b + 2c + d = 3 ; f′(−1) = 0 3a + 2b + c = 0
f′(2) = 0 12a − 4b + c = 0 **a = − 2 /9 b = − 1 /3 c = 4/3 d = 31/9**

Ejercicio 9:

La pendiente de la cuerda tiene que ser igual a la derivada de la función.

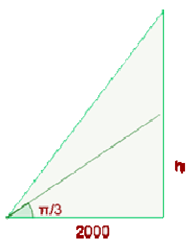
$m=\frac{1-0}{e-1}=\frac{1}{e-1}$ $f'(x)=\frac{1}{x}$; $\frac{1}{e-1}=\frac{1}{x}$ $x=e-1$; $(e-1, \ln(e-1))$

Ejercicio 10:

$\omega(t)= \varphi'(t)= t$ **ω = 7 ;** $\alpha(t)= \varphi''(t)= 1$ **α = 1**

Ejercicio 11:

1. ¿Cuál es la altura del cohete cuando Φ = Π/3 radianes?



$$h=2000\cdot tg\,\frac{\pi}{3}=2000\sqrt{3}$$

2. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando Φ = Π/3 radianes?

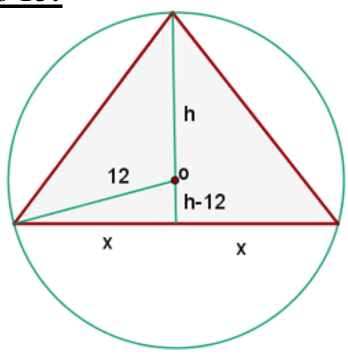
$h(t)=2000\cdot tg\,\Phi(t)$ $v(t)=h'(t)=2000\cdot\left(1+tg^2\,\Phi\right)\cdot\Phi'(t)$; $v(t)=2000\cdot\left(1+tg^2\,\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{20}=\ 400\ \frac{m}{s}$

Ejercicio 12:

$v(t)=V(r)$ $6t=\frac{4}{3}\pi r^3$; $r(t)=\sqrt[3]{\frac{9t}{2\pi}}$ $t(r)=\frac{2\pi r^3}{9}$

$t(0.6)=\frac{2\pi 0.6^3}{9}=0.15$ $r'(t)=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{9t}{2\pi}\right)^2}}\cdot\frac{9}{2\pi}$ $r'(0.15)=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{9\cdot 0.15}{2\pi}\right)^2}}\cdot\frac{9}{2\pi}=1.326\frac{m}{min}$

Ejercicio 13:



$S=\frac{1}{2}2x\,h=x\,h$; $12^2=x^2+(h-12)^2$ $\qquad x=\sqrt{24h-h^2}$

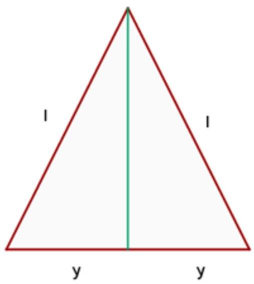
$S=h\sqrt{24h-h^2}=\sqrt{24h^3-h^4}$ $\qquad S'=\frac{72h^2-4h^3}{2\sqrt{24h^3-h^4}}=\frac{2h(36h-2h^2)}{2h\sqrt{24h-h^2}}=\frac{36h-2h^2}{\sqrt{24h-h^2}}$

$36h-2h^2=0$ $\qquad h=0$ $\qquad h=18$ $\qquad x=6\sqrt{3}$; Base: $\qquad 2x=12\sqrt{3}$

Lado: $\qquad l=\sqrt{x^2+h^2}$ $\qquad l=\sqrt{36\cdot 3+18^2}$ $\qquad l=12\sqrt{3}$; $\qquad S''=\frac{(36-4h)\sqrt{24h-h^2}-(36h-2h^2)\frac{24-2h}{2\sqrt{24h-h^2}}}{24h-h^2}$

$S''(18)=\frac{(36-4\cdot(18))\sqrt{24\cdot(18)-(18)^2}-\left[36\cdot(18)-2(18)^2\right]\frac{24-2(18)}{2\sqrt{24\cdot(18)-(18)^2}}}{24\cdot(18)-(18)^2}$; $\qquad S''(18)=\frac{(-)\ (+)-0\ \ldots}{+}=\frac{(-)-0}{+}=\frac{(-)}{+}=-$

Ejercicio 14:



$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\qquad x=r$ $\qquad l^2=h^2+r^2$

$2l+2x=30$ $\qquad l=15-x$; $(15-x)^2=h^2+r^2$ $\qquad h=\sqrt{225-30x}$

$V=\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{225-30x}$ $\quad V'=\frac{\pi}{3}\left(2x\sqrt{225-30x}-\frac{15x^2}{\sqrt{225-30x}}\right)=\pi\,\frac{150x-25x^2}{\sqrt{225-30x}}$

$150x-25x^2=0$ $\qquad x=0$ $\qquad x=6$ $\qquad$ Base = 12 cm

$$V''=\pi\,\frac{(150-50x)\sqrt{225-30x}-(150x-25x^2)\frac{-15}{\sqrt{225-30x}}}{225-30x}$$

$V''(6)=\pi\,\frac{(150-50\cdot(6))\sqrt{225-30\cdot(6)}-\left[150\cdot(6)-25\cdot(6)^2\right]\frac{-15}{\sqrt{225-30\cdot(6)}}}{225-30\cdot(6)}=V''(6)=\frac{(-)\cdot(+)-0\cdot\ldots}{+}=\frac{-}{+}=-$

Ejercicio 15:

$A=2\pi rh+2\pi r^2$ $\qquad V=\pi r^2 h$ $\qquad h=\frac{1}{\pi r^2}$; $\qquad A=2\pi r\frac{1}{\pi r^2}+2\pi r^2=\frac{2}{r}+2\pi r^2$

$A'=-\frac{2}{r^2}+4\pi r=\frac{-2+4\pi r^3}{r^2}$; $\frac{-2+4\pi r^3}{r^2}=0$ $\qquad r^3=\frac{1}{2\pi}$;

$r=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ $\qquad h=\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$; $\quad A''=\frac{-4}{r^3}+4\pi$ $\qquad A''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)>0$

Ejercicio 16:

$S=5x^2+6y^2$ $\qquad x+y=44$ $\qquad y=44-x$

$S=5x^2+6(44-x)^2$ $\quad S'=10x-12(44-x)=22x-528$

$22x-528=0$ $\qquad x=24$ $\qquad y=20$ $\qquad S''=22<0$

Ejercicio 17:

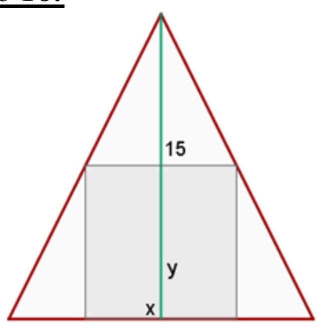
$$S=\pi r^2+l^2 \qquad 2\pi r+4l=1 \qquad l=\frac{1-2\pi r}{4} \qquad S=\pi r^2+\left(\frac{1-2\pi r}{4}\right)^2$$

$$S'=2\pi r+2\frac{1-2\pi r}{4}\left(-\frac{2\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\left[r\left(8+2\pi\right)-1\right]; \quad \frac{\pi}{4}\left[r\left(8+2\pi\right)-1\right]=0 \qquad r=\frac{1}{8+2\pi}$$

$$\text{Trozo del círculo}=2\pi\frac{1}{8+2\pi}=0.439\,\text{m}; \quad \text{Trozo del cuadrado}=1-0.439=0.561\,\text{m}$$

$$S''=\frac{\pi}{4}(8+2\pi)>0$$

Ejercicio 18:



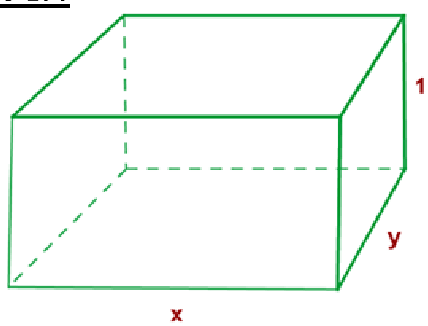
$$S=x\cdot y$$

Al tener **dos triángulos semejantes** se cumple que:

$$\frac{x}{10}=\frac{15-y}{15} \qquad x=\frac{2(15-y)}{3} \qquad S=\frac{2(15-y)}{3}\cdot y=\frac{2}{3}\left(15y-y^2\right)$$

$$S'=\frac{2}{3}(15-2y) \qquad \frac{2}{3}(15-2y)=0 \qquad y=\frac{15}{2} \qquad x=5; \quad S''=\frac{2}{3}(-2)<0$$

Ejercicio 19:



$$C(x)=50xy+60xy+40(2x\cdot 1+2y\cdot 1)$$

$$C(x)=110xy+80(x+y) \qquad 9=x\cdot y\cdot 1 \qquad y=\frac{9}{x}$$

$$C(x)=110x\left(\frac{9}{x}\right)+80\left[x+\left(\frac{9}{x}\right)\right]=990+80\left(x+\frac{9}{x}\right) \qquad C'(x)=80\left(1-\frac{9}{x^2}\right) \qquad 80\left(1-\frac{9}{x^2}\right)=0$$

$$1-\frac{9}{x^2}=0 \qquad x^2=9 \qquad x=3 \qquad y=3; \quad C''(x)=80\left(\frac{9-2x}{x^4}\right)>0$$

Ejercicio 20:

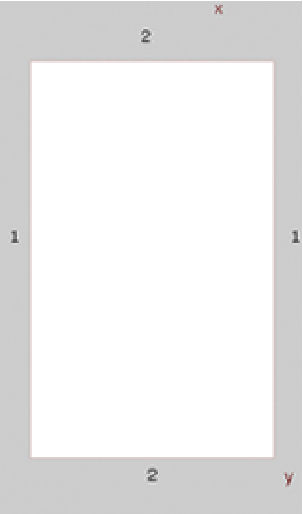
$$V=(80-2x)(50-2x)x=4x^3-260x^2+4000x$$

$$V'=12x^2-520x+4000 \qquad 12x^2-520x+4000=0$$

$x=10$ $\qquad$ $x=33.3$ (No es válida: $50-2x<0$)

$$V''=24x-520 \qquad V''(10)=24\cdot 10-520<0$$

Ejercicio 21:



$S = xy$ $\quad (x-2)(y-4) = 18$ $\quad y = \dfrac{4x+10}{x-2}$

$S = x\,\dfrac{4x+10}{x-2} = \dfrac{4x^2+10x}{x-2}$; $\quad S' = \dfrac{(8x+10)(x-2)-(4x^2+10x)}{(x-2)^2} = \dfrac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2}$

$\dfrac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0$ $\quad x = 5$ $\quad x = -1$ (No es válida)

Ejercicio 22:

$B(x) = 1.2x - (0.1x)^3$ $\quad B'(x) = 1.2 - 3(0.1x)^2 \cdot 0.1 = 1.2 - 0.003x^2$

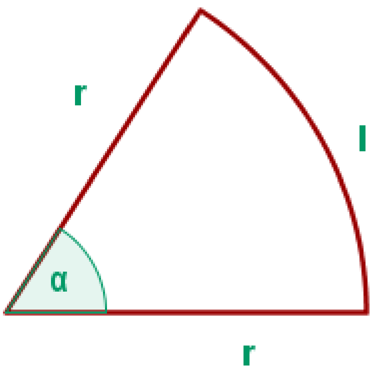
$1.2 - 0.003x^2$ $\quad x^2 = 400$ $\quad x = 20$

$B''(x) = -0.006x$ $\quad B''(20) = -0.006 \cdot 20 < 0$ $\quad B(x) = 1.2 \cdot 20 - (0.1 \cdot 20)^3 =$ 16 millones

Ejercicio 23:

1. Producción actual: 25 · 600 = 15.000 frutos.
2. Si se plantan x árboles más, la producción de cada árbol será: 600 − 15 x.
3. $P(x) = (25 + x)(600 - 15x) = -15x^2 + 225x + 1500$
4. $P'(x) = -30x + 225$ $\quad -30x + 225 = 0$ $\quad x = 7.5$; $P''(x) = -30 < 0$
La producción será máxima si la huerta tiene 25 + 7 = 32 ó 25 + 8 = 33 árboles

Ejercicio 24:



$S = \dfrac{1}{2} l \cdot r$ $\quad l = \alpha \cdot r$

$2r + l = 10 \quad l = 10 - 2r$ $\quad S = \dfrac{1}{2}(10-2r)\cdot r = 5r - r^2$

$S' = 5 - 2r$ $\quad 5 - 2r = 0$ $\quad r = \dfrac{5}{2}$ $\quad r = \dfrac{5}{2}$ m $\quad l = 5$m $\quad \alpha = 2$ rad

$S'' = -2 < 0$

Ejercicio 25:

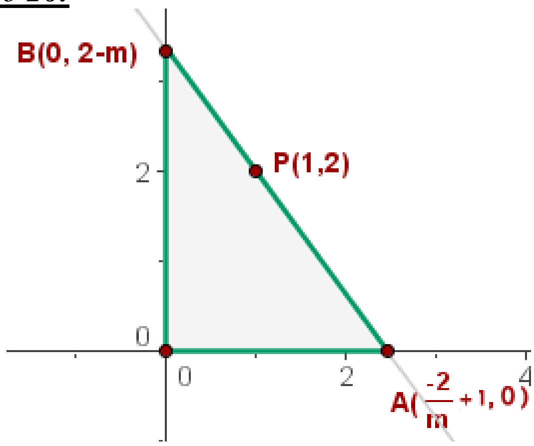
$$V = kx^2 + k(2-x)^2 = k(2x^2 - 4x + 4)$$

$$V' = k(4x-4) \qquad 4x - 4 = 0 \qquad x = 1$$

$$V'' = 4k > 0$$

El rubí se ha de dividir en dos partes iguales de 1 g.

Ejercicio 26:



$$y - 2 = m(x-1) \qquad x = 0 \qquad y = 2 - m$$

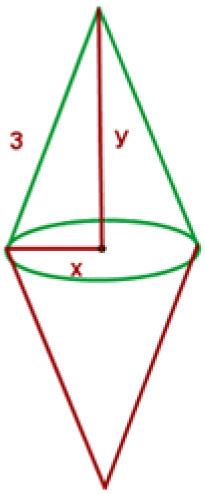
$$y = 0 \qquad x = -\frac{2}{m} + 1 \qquad S = \frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{m}+1\right)(2-m) = -\frac{2}{m} - \frac{m}{2} + 2$$

$$S' = \frac{2}{m^2} - \frac{1}{2} = \frac{4-m^2}{2m^2} \qquad \frac{4-m^2}{2m^2} = 0 \qquad m = -2$$

Con m = 2 no se formaría triángulo porque las coordenadas de A y B coinciden con el origen.

$$S'' = \frac{-2}{m^3} \qquad S''(-2) = \frac{-2}{(-2)^3} > 0$$

Ejercicio 27:



$$V = 2\cdot\frac{1}{3}\pi x^2 y \qquad x^2 + y^2 = 9 \qquad x^2 = 9 - y^2$$

$$V = 2\cdot\frac{1}{3}\pi(9-y^2)y = \frac{2\pi}{3}(9y - y^3) \quad ; \quad V' = \frac{2\pi}{3}(9-3y^2) \qquad \frac{2\pi}{3}(9-3y^2) = 0$$

$$y = \sqrt{3} \qquad r = \sqrt{6} \qquad V'' = \frac{2\pi}{3}(-6y) < 0$$