14 Funciones derivables: propiedades locales y globales

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = 3^{2x^2+1}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

2. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba si es paralela a la recta de ecuación $2x - 3y + 1 = 0$.

3. Determina la ecuación de una parábola que pase por los puntos $A(0, 1)$ y $B(2, 3)$ y halla un punto en el segmento de parábola comprendido entre ellos en el que la tangente a la curva sea paralela a la cuerda determinada por A y B.

4. Comprueba que la función $f(x) = \mathrm{L}(\mathrm{e} + \operatorname{sen} x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 5\pi]$ y halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es horizontal.

5. Determina el valor de k para que la función $f(x) = 3x^2 + 4x - 4$ verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, k]$ y halla el valor $x = c$ establecido por dicho teorema.

6. Dada la función $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$, halla el valor medio establecido por el teorema de Lagrange en el intervalo $[1, 3]$.

7. Determina los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-3} & \text{si } x < 1 \\ x^2 + b & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[-1, 2]$ y halla el valor intermedio correspondiente.

8. Calcula los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 4x^2 - 12x}{x^2 - 6x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

9. Calcula los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

10. Calcula los límites siguientes:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x - \cos x}{1 - \cos^2 x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}$

11. Calcula el valor del siguiente límite: $A = \displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$

12. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + \operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

SOLUCIONES

1. $Df(x) = 4x \cdot 3^{2x^2+1} \cdot L3 \Rightarrow f'(0) = 0$
Además, $f(0) = 3$, el punto de tangencia es $(0, 3)$.
La ecuación de la tangente es $y - 3 = 0$.

2. $Df(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(1) = -3$
Además, $f(1) = 2$, el punto de tangencia es $(1, 2)$
La ecuación de la tangente es $y - 2 = -3 \cdot (x - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x + y - 5 = 0$, que no es paralela a la recta $2x - 3y + 1 = 0$.

3. La parábola $f(x) = x^2 - x + 1$ verifica las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[0, 2]$; el valor intermedio nos da el punto en que la tangente es paralela a la cuerda AB:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 1$$

$Df(x) = 2x - 1$; $f'(c) = 2c - 1 = 1 \Rightarrow c = 1$

El punto buscado es $C(1, -1)$.

4. Como $e + \text{sen}\, x > 0$ y es continua, la función $f(x)$ está definida y es continua en $[0, 5\pi]$; es derivable con derivada $Df(x) = \dfrac{\cos x}{e + \text{sen}\, x}$; además $f(0) = f(5\pi) = 1$, por lo que cumple las hipótesis del teorema de Rolle. Existe $c \in (0, 5\pi)$ tal que:

$f'(c) = 0 \Rightarrow \dfrac{\cos c}{e + \text{sen}\, c} = 0 \Rightarrow \cos c = 0$; por tanto, $c = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k = 0, 1, ..., 4$.

5. $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbf{R}$ por ser un polinomio, luego lo es en $[-2, k]$; por tanto:

$f(-2) = f(k) \Rightarrow 3k^2 + 4k - 4 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{2}{3}$

El valor c tal que $f'(c) = 0$ es $6c + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = -\dfrac{2}{3}$

6. $f(x)$ es continua y derivable en $[1, 3]$ por serlo en $\mathbf{R} \Rightarrow$ existe $c \in (1, 3)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \Rightarrow 6c + 4 = \frac{36 - 4}{2} \Rightarrow c = 2$$

7. Para que sea continua en $x = 1$:

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow -\frac{a}{2} = 1 + b$$

Para que sea derivable en $x = 1$:

$$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow -\frac{a}{4} = 2$$

Resolviendo el sistema $a = -8$ y $b = 3$.

La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-8}{x - 3} & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

es continua y derivable en $[-1, 2]$; por el teorema de Lagrange, existe $c \in (-1, 2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5}{3}$$

$Df(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{(x - 3)^2} & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, igualando la derivada el único valor válido es $c = +\dfrac{2}{5}\sqrt{30}$.

8. a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 4x^2 - 12x}{x^2 - 6x} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - 8x - 12}{2x - 6} = 2$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}$

9. a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\text{sen}\, x} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}\, x - x}{x - \text{sen}\, x} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}^2 x}{1 - \cos x} \underset{(1)}{=}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{2\, \text{tg}\, x\, (1 + \text{tg}^2 x)}{\text{sen}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\, (1 + \text{tg}^2 x)}{\cos x} = 2$

10. a) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos x}{1 - \cos^2 x} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + \text{sen}\, x}{2 \cos x\, \text{sen}\, x} = \infty$

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{2\, (e^x - 1)\, e^x} \underset{(1)}{=}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{4e^{2x} - 2e^x} = \frac{1}{2}$

11. Tomando logaritmos:

$\displaystyle LA = \lim_{x\to 0} \frac{L(1 + x^2)}{1 - \cos x} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(1 + x^2)\, \text{sen}\, x} \underset{(1)}{=}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0} \frac{2}{2x\, \text{sen}\, x + (1 + x^2) \cos x} = 2 \Rightarrow A = e^2$

12. Para que sea continua en $x = 0$: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1 + \text{sen}\, x - e^x}{e^x - 1} \underset{(1)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{e^x} = 0 = f(0)$

por tanto, la función es continua en $x = 0$.

Nota: (1) Aplicando la regla de L'Hôpital.

14 Funciones derivables: propiedades locales y globales

1. Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}\, x + \text{L}(\text{tg}\, x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

2. Halla los puntos de la curva $f(x) = x^2 + 2$ en los que la tangente a esta pasa por el punto $P(0, 1)$. Escribe las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

3. Estudia para qué valores de a, b y c la recta que une los puntos $A(-1, 1)$ y $B(1, 3)$ es tangente en el punto B a la gráfica de la función $f(x) = a\text{L}(1 + x^2) - bx + c$.

4. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 0)$ y es paralela a la tangente a la curva $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ en su punto de intersección con la recta $x = 2$.

5. Calcula el valor de m, n y k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^3 + mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[k, 1]$ y determina el valor $x = c$ que predice este teorema.

6. Calcula el valor de a, b y k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leqslant 1 \\ ax^2 + b(x - 1) + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, k]$ y determina el valor $x = c$ que predice este teorema.

7. Demuestra que para cualquier número real p, la ecuación $2x^5 + x + p = 0$ no tiene nunca dos soluciones reales.

8. Sin calcular la derivada de la función $f(x) = x \cdot (x^2 - 1) \cdot (x + 3)$, estudia cuántas raíces reales tiene la ecuación $f'(x) = 0$ y determina los intervalos a los que pertenecen.

9. Escribe la fórmula de los incrementos finitos para cada una de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.

a) $f(x) = \cos x$ en $[\pi, \pi + h]$

b) $f(x) = \text{sen}\, 2x$ en $[2, 2 + h]$

10. Calcula el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

SOLUCIONES

1. $D\, f(x) = \cos x + \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2$

Además, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} + \operatorname{L}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: el punto de tangencia es $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La ecuación de la tangente es $y - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\right) \cdot \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

2. Los puntos de tangencia son:
$A(a, f(a)) = A(a, a^2 + 2)$
Las ecuaciones de las tangentes son:
$y - 1 = mx$ con $m = f'(a) \Rightarrow m = 2a$
Como A pertenece a la tangente $a^2 + 2 - 1 = (2a) \cdot a$ y resolviendo la ecuación $a = \pm 1$. Los puntos de tangencia son $A_1(-1, 3)$ y $A_2(1, 3)$ y las tangentes t_1: $y - 3 = -(x + 1)$ y t_2: $y - 3 = (x - 1)$.

3. La gráfica pasa por B: $f(1) = 3 \Rightarrow a\operatorname{L}2 - b + c = 3$ la recta que pasa por A y B tiene pendiente $m = 1$ y es tangente en B, $f'(1) = 1$; como $f'(x) = \dfrac{2ax}{1 + x^2} - b \Rightarrow 1 = a - b$. Por tanto, $a = 1$, $c = 3 + b - (1 + b)\operatorname{L}2$ y b es un parámetro que se puede elegir de forma arbitraria.

4. La pendiente de la recta buscada es $f'(2)$:
$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} \Rightarrow f'(2) = -20$
Por lo tanto, la recta pedida es:
$y - 0 = -20(x - 1) \Rightarrow 20x + y - 20 = 0$

5. Para que sea continua en $x = 0$:
$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow n = 3$

Para que sea derivable en $x = 0$, $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow m = 0$

Para que $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ continua y derivable en $[k, 1]$, verifique las hipótesis del teorema de Rolle $f(1) = f(k) \Rightarrow f(k) = 4$.

Para $k < 0$: $3k^2 + 3 = 4 \Rightarrow k = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$D\, f(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x \leq 0 \\ 3x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow c = 0$

6. Para que sea continua en $x = 1$:
$f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow 3 = a + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -1$

Para que la función:
$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 5x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua y derivable en $[-2, k]$ y verifique las hipótesis del teorema de Rolle: $f(-2) = f(k) = -6$; si $k > 1$; $-k^2 + 5k - 1 = -5 \Rightarrow k = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$

$D\, f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f'(c) = 0 \Rightarrow -2x + 5 = 0 \Rightarrow c = \dfrac{5}{2}$

7. Por reducción al absurdo: sean x_1 y x_2 soluciones reales distintas de la ecuación $x_1 < x_2$.

La función $f(x) = 2x^5 + x + p$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[x_1, x_2]$ y, por tanto, existe c, $x_1 < c < x_2$ tal que $f'(c) = 0$; es decir, $10c^4 + 1 = 0 \Rightarrow 10c^4 = -1$, imposible si c es real.

Por tanto, la ecuación no puede tener dos soluciones reales.

8. $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbf{R}$ y, además, $f(-3) = f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.

La función cumple las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos $[-3, -1]$, $[-1, 0]$ y $[0, 1]$ y, por tanto, $f'(x) = 0$ tiene al menos una solución en el interior de cada uno de ellos.

Como $f'(x)$ es de grado tres, tiene exactamente tres raíces, una en cada intervalo.

9. a) $\cos(\pi + h) - \cos\pi = -h \operatorname{sen} c$ con $\pi < c < \pi + h$

b) $\operatorname{sen}[2(2 + h)] - \operatorname{sen} 4 = 2h \cos 2c$ con $2 < c < 2 + h$

10. $\lim\limits_{x \to 0^+} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\dfrac{1}{x^2}} =$
$= \lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$