13 Cálculo de derivadas

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 1}$ b) $f(x) = (2x + 1) \cdot \sqrt{2x + 1}$ c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x}$

2. Calcula la primera, segunda y tercera derivadas de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ dando las expresiones correspondientes de la forma más simple posible.

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}\right)$ b) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{e^x + x}{e^x - x}\right)$

4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$ b) $f(x) = e^{\frac{x^2}{(x-1)^2}}$

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ b) $f(x) = x^{x^3}$

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \mathrm{L}\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}}$ b) $f(x) = \mathrm{L}(\mathrm{L}^2(x \cdot \mathrm{L}^3 x))$

7. Deriva la función $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ y calcula el valor de la función derivada en $x = 0$ y en $x = -1$.

8. Calcula las derivadas primera, segunda y tercera de la función $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x$.

9. Calcula las cuatro primeras derivadas de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

10. Halla la expresión de la derivada de orden n de la función $f(x) = \dfrac{1}{ax + b}$ para a y b constantes.

11. Halla la expresión de la derivada de orden n de la función $f(x) = \mathrm{L}\,(x + 1)$.

12. Obtén la expresión de la derivada de orden n de la función $f(x) = \dfrac{-1}{x}$

13. El espacio, en metros, recorrido por un móvil en función del tiempo, en segundos, viene dado por la expresión:

$$s = 0{,}05t^3 - 0{,}3t^2 + 3t$$

a) Halla la velocidad de móvil en cada instante.

b) Halla la velocidad cuando han transcurrido 5 segundos.

c) Halla la aceleración cuando han transcurrido 10 segundos.

14. Los lados de un rectángulo crecen a razón de 20 y 30 centímetros por minuto, respectivamente. Halla la velocidad con la que crece el área de dicho rectángulo en el momento que su lado más pequeño mide 800 cm.

SOLUCIONES

1. a) $D\,f(x) = \dfrac{(3x+1)\cdot 2 - (2x-1)\cdot 3}{(3x+1)^2} = \dfrac{5}{(3x+1)^2}$

b) $D\,f(x) = 2\sqrt{2x+1} + \dfrac{2\cdot(2x+1)}{2\sqrt{2x+1}} =$

$= 2\sqrt{2x+1} + \dfrac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{2(2x+1)+2x+1}{\sqrt{2x+1}} =$

$= \dfrac{6x+3}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{3(2x+1)\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}\sqrt{3x+1}} = 3\sqrt{2x+1}$

c) $f(x) = 1 + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \Rightarrow$

$\Rightarrow D\,f(x) = \dfrac{\text{sen } x\cdot(-\text{sen } x) - \cos x\cdot\cos x}{\text{sen}^2 x} =$

$= -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$

2. $D\,f(x) = \dfrac{(x^2-1)\cdot 2 - 2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$

$D^2\,f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2(-4x)+(2x^2+2)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$

$= \dfrac{(x^2-1)\cdot(-4x)+(2x^2+2)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2-1)^3} = \dfrac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3}$

$D^3\,f(x) =$

$= \dfrac{(x^2-1)^3(12x^2+12)-(4x^3+12x)\cdot 3(x^2-1)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^6} =$

$= \dfrac{(x^2-1)\cdot(12x^2+12)-(4x^3+12x)\cdot 3\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$

$= \dfrac{-12x^4-72x^2-12}{(x^2-1)^4}$

3. a) $Df(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{x^2-6x+5}{x-3}\right)}\cdot\dfrac{x^2-6x+13}{(x-3)^2}$

b) $Df(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^x+x}{e^x-x}\right)^2}\cdot\dfrac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2} =$

$= \dfrac{e^x(1-x)}{e^{2x}+x^2}$

4. a) $Df(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2\cdot\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}}$

b) $Df(x) = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}\cdot e^{\frac{x^2}{(x-1)^2}}$

5. a) $Df(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[L\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}\right]$

b) $Df(x) = x^{x^3}\cdot x^2\cdot(1+3\,Lx)$

6. a) $Df(x) = \dfrac{e^x-1}{e^{2x}+1}$

b) $Df(x) = \dfrac{6+2\,Lx}{x\cdot Lx\cdot L(x\cdot L^3x)}$

7. $Df(x) = \dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

$f'(0) = \dfrac{1}{4}$ $\quad f'(-1) = \dfrac{4e^2}{(e^2+1)^2}$

8. $Df(x) = 2\,\text{sen } x\cos 2x + \cos x\,\text{sen } 2x$

$D^2f(x) = 4\cos x\cos 2x - 5\,\text{sen } x\,\text{sen } 2x$

$D^3f(x) = -14\,\text{sen } x\cos 2x - 13\cos x\,\text{sen } 2x$

9. $Df(x) = e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$D^2f(x) = e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)$

$D^3f(x) = e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{6}{x^4}\right)$

$D^4f(x) = e^x\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{12}{x^3}-\dfrac{24}{x^4}+\dfrac{24}{x^5}\right)$

10. $Df(x) = -\dfrac{a}{(ax+b)^2}$

$D^2f(x) = \dfrac{2a^2}{(ax+b)^3}$

$D^3f(x) = -\dfrac{6a^3}{(ax+b)^4}$

$D^nf(x) = (-1)^n\dfrac{n!\cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

11. $Df(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\quad D^2f(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$D^3f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}\ldots$ $\quad D^nf(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+1)^n}$

12. $D\,f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad D^2\,f(x) = \dfrac{-2}{x^3},$

$D^3\,f(x) = \dfrac{6}{x^4}\ldots$ $\quad D^n\,f(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{n!}{x^{n+1}}$

13. a) $v = s' = 0{,}15t^2 - 0{,}6t + 3$

b) $v(5) = 3{,}75$ m/s

c) $a = v' = 0{,}3t - 0{,}6 \Rightarrow a(10) = 2{,}4$ m/s^2

14. Los lados miden, en función del tiempo:

$a = 20t \quad b = 30t$

El área medirá: $S = 600t^2$

La velocidad con la que crece el área es:

$v = S' = 1\,200t$

Cuando el lado pequeño mide:

$a = 20t = 800 \Rightarrow t = 40$

Por tanto:

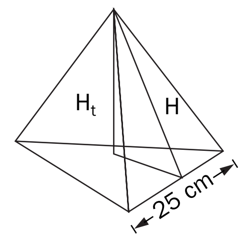
$v(40) = 48\,000$ cm^2/min $= 4{,}8$ m^2/min

13 Cálculo de derivadas

1. El lado de un tetraedro crece a razón de 5 cm cada minuto.

a) ¿A qué velocidad crece el área de la base cuando el lado mide 25 cm?

b) ¿A qué velocidad crece el volumen cuando el lado mide 25 cm?



2. a) Escribe una expresión para el logaritmo en base x de un número N, utilizando únicamente logaritmos neperianos.

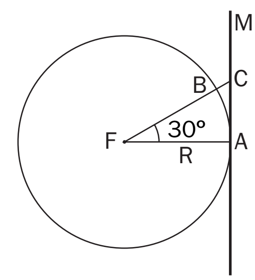
b) Calcula la derivada de la función $f(x) = \log_x \sqrt{x+1}$

3. Calcula la derivada de las funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}}$ b) $f(x) = \text{sen}\,(\text{sen}\,(\text{sen}\,(x)))$

4. Las funciones f y g son continuas y derivables en todo el conjunto de los números reales. Se sabe que $f(3) = -4$, $f'(3) = -3$ y que $g'(-4) = 4$. Calcula el valor de $(g \circ f)'\,(3)$.

5. Un ciclista recorre, partiendo del punto A, la pista de forma circular que aparece en la figura. En el centro de la pista hay un foco luminoso F, por lo que el ciclista proyecta, en cada instante, una sombra sobre el muro AM. Calcula la velocidad de la sombra cuando el ciclista ha recorrido la doceava parte del circuito sabiendo que la velocidad a la que pedalea es constante e igual a 40 km/h.



6. Una escalera de 5 m de longitud está apoyada en la pared de forma que el pie de la escalera se va desplazando alejándose del muro a una razón de 10 cm por minuto. Calcula la velocidad a la que desciende la parte superior A de la escalera cuando el pie B está a 2 m de la pared.

7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{x^x}$ b) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

8. Calcula la derivada de los cinco primeros órdenes de la función $f(x) = x \cdot [\text{sen}\,(\text{L}\,x) + \cos\,(\text{L}\,x)]$

9. Calcula la derivada de orden n de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^m$, $m > n$ b) $f(x) = x \cdot \text{L}x$

10. La **fórmula de Leibniz** nos facilita una expresión para hallar la derivada de orden n de un producto de funciones que sean n veces derivables:

$$D^n(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i} \cdot D^i f(x) \cdot D^{n-i}\, g(x)$$

siendo $C_{n,i}$ el número de combinaciones de n elementos tomados de i en i, $D^0 f(x) = f(x)$ y $D^0 g(x) = g(x)$.

Aplicando la fórmula de Leibniz, halla la derivada de orden n de la función $f(x)$ y $x^n \cdot e^x$ y comprueba su validez calculando directamente las derivadas de orden n para los casos $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$.

SOLUCIONES

1. a) La medida de cada arista es $L = 5t$, donde L se mide en cm y t en minutos.

La altura del triángulo equilátero de la base es:

$$H = \sqrt{(5t)^2 - \left(\frac{5t}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{75t^2}{4}} = \frac{5t\sqrt{3}}{2}$$

El área de dicho triángulo es:

$$S = \frac{5t \cdot \frac{5t\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25t^2\sqrt{3}}{4}$$

Cuando el lado mide 25 cm, han pasado 5 minutos. La velocidad de crecimiento del área es:

$$S'(5) = \frac{25 \cdot 25 \cdot \sqrt{3}}{4} = 270{,}6 \text{ cm}^2 \text{ por minuto.}$$

b) La altura del tetraedro es: $H_t = \dfrac{5t\sqrt{6}}{3}$

El volumen es: $V = \dfrac{S \cdot H_t}{3} = \dfrac{125t^3\sqrt{2}}{12}$

La velocidad de crecimiento del volumen es:

$V'(5) = 1\,104{,}8$ cm^2 por minuto.

2. a) Haciendo los siguientes cambios de variable:

$$\left.\begin{aligned} LN &= A \\ Lx &= B \\ \log_x N &= C \end{aligned}\right\} \Rightarrow N = a^A\ x = e^B\ x^C = N$$

$$(e^B)^C = e^{BC} = e^A \Rightarrow BC = A$$

$$Lx \cdot \log_x N = LN \Rightarrow \log_x N = \frac{LN}{Lx}$$

b) $f(x) = \log_x \sqrt{x+1} = \dfrac{L\sqrt{x+1}}{Lx} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{Lx \cdot \dfrac{1}{2x+2} - L\sqrt{x+1} \cdot \dfrac{1}{x}}{(Lx)^2}$$

3. a) $f(x) \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}} = \sqrt[16]{x^{15}} = x^{\frac{15}{16}}$

$$f'(x) = \frac{15}{16} x^{\frac{15}{16} - 1} = \frac{15}{16} x^{-\frac{1}{16}} = \frac{15}{16\sqrt[16]{x}}$$

b) $f'(x) = \cos(\text{sen}(\text{sen}(x)) \cdot \cos(\text{sen}(x))) \cdot \cos x$

4. Aplicando la regla de la cadena para la composición de funciones derivables:

$(g \circ f)'(3) = g'(f(3)) \cdot f'(3) = g'(-4) \cdot f'(3) = 4 \cdot (-3) = -12$

5. Sea R el radio del círculo del circuito y α el ángulo recorrido en radianes.

La longitud del arco AB es $\alpha \cdot R = 40t$

Por otra parte

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AC}{R} \Rightarrow AC = R \cdot \text{tg}\,\alpha = R\text{tg}\left(\frac{40t}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC' = R \cdot \frac{40}{R} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{40t}{R}\right)} = \frac{40}{\cos^2 \alpha}$$

En el momento en que $\alpha = 30° = \dfrac{\pi}{6}$ rad:

$$v = AC' = \frac{40}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} = 53{,}3 \text{ km/h}$$

6. El espacio, en metros, recorrido por el pie de la escalera es: $S_P(t) = 0{,}1t$ donde t se mide en minutos y $S_p(t)$ en metros.

El espacio recorrido por el extremo que se apoya en la pared es:

$$S_E(t) = \sqrt{25 - 0{,}01t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t) = s'_E(t) = \frac{-0{,}02t}{2\sqrt{25 - 0{,}01t^2}} = -\frac{0{,}01t}{\sqrt{25 - 0{,}01t^2}}$$

Como:

$S_P(t) = 2 \Rightarrow t = 20$ minutos $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S'_E(20) = -\frac{0{,}2}{\sqrt{21}} = -0{,}043 \text{ m/min} = -4{,}3 \text{ cm/min}$$

7. a) $\text{D}\, f(x) = e^{x^x} \cdot x^x \cdot [1 + \text{L}x]$

b) $\text{D}\, f(x) = \sqrt[x]{x} \cdot \dfrac{1 - \text{L}x}{x^2}$

8. $\text{D}\, f(x) = 2\cos(\text{L}x)$, $\text{D}^2 f(x) = -\dfrac{2\,\text{sen}(\text{L}x)}{x}$

$$\text{D}^3 f(x) = \frac{2\,\text{sen}(\text{L}x) - 2\cos(\text{L}x)}{x^2}$$

$$\text{D}^4 f(x) = \frac{6\cos(\text{L}x) - 2\,\text{sen}(\text{L}x)}{x^3}$$

$$\text{D}^5 f(x) = -\frac{20\cos(\text{L}x)}{x^4}$$

9. a) $\text{D}\, f(x) = mx^{m-1}$, $\text{D}^2 f(x) = m(m-1)\, x^{m-2}$, $\text{D}^3 f(x) = m(m-1)(m-2)\, x^{m-3}$ ...,

$$\text{D}^n f(x) = \frac{m!}{(m-n)!}\, x^{(m-n)}$$

b) $\text{D}\, f(x) = 1 + Lx$, $\text{D}^2 f(x) = \dfrac{1}{x}$,

$\text{D}^3 f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $\text{D}^4 f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ ...,

$$\text{D}^n f(x) = (-1)^{n-2} \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} \quad \text{si } n \geqslant 2$$

10. $\text{D}^n(x^n \cdot e^x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_{n,i} \cdot \text{D}^i(x^n) \cdot \text{D}^{n-i}(e^x) =$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!} \cdot n(n-1) \ldots (n-i+1)x^{n-i} \cdot e^x =$$

$$= e^x\left[x^n + n^2x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} + \ldots + n!\right]$$

$n = 1$, $\text{D}(xe^x) = e^x[x + 1]$; $n = 2$, $\text{D}(x^2e^x) = e^x[x^2 + 2x]$, $\text{D}^2(x^2e^x) = e^x[x^2 + 4x + 2]$;

$n = 3$, $\text{D}(x^3e^x) = e^x[x^3 + 3x^2]$;

$\text{D}^2(x^3e^x) = e^x[x^3 + 6x^2 + 6x]$;

$\text{D}^3(x^3e^x) = e^x[x^3 + 9x^2 + 18x + 6]$