MATEMATICAS. BC2 TEMA 7: Teoremas

1 Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ corta al eje de las abscisas en el intervalo [0,2]. ¿Se puede decir lo mismo de la función: $f(x)=\frac{2x-3}{x-1}$

2 De f(x): ¿Se puede afirmar que esté acotada en el intervalo [1,4]?

$$f(x)=\frac{x^2+4x-2}{x^2-2x+1}$$

3 Sea la función $f(x)= x^2 + 1$. ¿Se puede afirmar que la función toma todos los valores del intervalo [1,5]?

4 Demostrar que la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$, tiene al menos una solución $x = a$ tal que $1 < a < 2$

5 Sea la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$. ¿Se puede afirmar que existe al menos un punto c en el interior del intervalo [1,2] tal que $f(c) = 0$?

6 Justificar que $f(x)=x^3+x+1$ tiene un cero comprendido entre −1 y 0

7 Probar que la ecuación $e^{-x}+2=x$ tiene al menos una solución real.

8 Demostrar que existe algún número real x tal que sen x = x.

9 Dada la función f(x), demuestra que existe un punto del intervalo abierto (2, 4) en el que f(x) toma el valor 1. Calcula dicho valor.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{7-(16)^{\frac{1}{x}}}{1+(16)^{\frac{1}{x}}} & si\ \ x\neq 0\\ 7 & si\ \ x=0\end{cases}$$

10 Dada la función $f(x) = x^3$, estudiar si está acotada superiormente e inferiormente en el intervalo [1,5] e indica si alcanza sus valores máximos y mínimos.

11 Probar que la función f(x) = x + sen x − 1 es continua para todo $\mathbb{R}$ y probar que existe al menos una raíz real de la ecuación x + sen x − 1 = 0.

12 Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo [a, b] y tales que cumplen que f(a) > g(a) y f(b) < g(b). Demostrar que $\exists c \in (a, b)$ tal que f(c) = g(c).

13 ¿Es aplicable el teorema de Rolle a $f(x) = |x - 1|$ en el intervalo [0, 2]?

14 Estudiar si la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos [−1, 0] y [0, 1]. En caso afirmativo calcula los valores de c.

15 ¿Satisface $f(x)=1-x$ las condiciones del teorema de Rolle en [−1, 1]?

16 Probar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución.

17 ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 25 = 0$?

18 Demostrar que la ecuación $2x^3-6x+1=0$ una única solución real en (0, 1)

19 Aplica el teorema de Lagrange en [0,2] a $f(x)=4x^2-5x+1$, ¿puedes a $g(x)=1/x^2$?

20 En el segmento de parábola $y = x^2 + bx + c$ comprendido entre los puntos A=(1, 1) y B=(3, 0) hallar un punto cuya tangente sea paralela la cuerda AB.

21 Calcula un punto del intervalo [1, 3] en el que la tangente a $y=x^3-x^2+2$ es paralela a la recta determinada por los puntos A(1, 2) y B(3, 20). ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

22 Calcula a y b para que f(x) cumpla el teorema de Lagrange en [2, 6]

$$f(x)=\begin{cases}ax-3 & Si\ x<4\\ -x^2+10x-b & Si\ x\geq 4\end{cases}$$

SOLUCIONES

Ejercicio 1:

La primera función es continua en toda $\mathbb{R}$ y $f(0)=0^2 - 4 \cdot 0 + 2 > 0$. $f(2)=2^2 - 4 \cdot 2 + 2 < 0$. Como se cumple el **teorema de Bolzano**, existe al menos un c que pertenece al intervalo (0, 2) que corta al eje de abscisas.

No podemos afirmar lo mismo de la segunda función ya que no es continua en x=1.

Ejercicio 2:

Por no ser continua f(x) en x = 1, la función no es continua en el intervalo cerrado [1,4], como consecuencia **no** podemos afirmar que la función esté acotada en dicho intervalo.

Ejercicio 3:

$x^2 + 1 = 1$ $x = 0$. $x^2 + 1 = 5$ $x = 2$. La función es continua en todo R por ser una función polinómica. Es en el intervalo [0,2] donde se verifica que f(0) = 1 y f(2)= 5. Por la **propiedad de Darboux**, la función alcanza todos los valores comprendidos en el intervalo [1,5].

Ejercicio 4:

f(x) es continua en [1,2], $f(1) = 1^3 + 1 - 5 = -3 < 0$, $f(2) = 2^3 + 2 - 5 = 5 > 0$. Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el **teorema de Bolzano**, existe c $\in$(1,2) tal que: $f(c)= 0$; $c^3+c-5=0$. Por tanto existe al menos una solución real a la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$.

Ejercicio 5:

f(x) es continua en [1,2]. $f(1) = 1^3 - 1^2 + 1 = 1 > 0$. $f(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 5 > 0$. No puede aplicarse el **teorema de Bolzano** porque no cambia de signo.

Ejercicio 6:

Por ser polinómica la función es continua en el intervalo [−1, 0]. $f(-1) = (-1)^3 + (-1) + 1 = -1 < 0$. $f(0) = 0 + 0 + 1$. Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el **teorema de Bolzano**, podemos afirmar que existe c $\in$(−1, 0) tal que: $f(c) = 0$

Ejercicio 7:

La función es continua en el intervalo [0, 3]. $f(0) = e^0 + 2 - 0 > 0$. $f(3) = e^{-3} + 2 - 3 < 0$. Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el **teorema de Bolzano**, existe c $\in$(0, 3) tal que: $f(c)=0$; $e^{-c}+2=c$. Por tanto existe al menos una solución real a la ecuación $e^{-x} + 2 = x$.

Ejercicio 8:

Consideremos la función f(x)=sen (x)−x. Es continua en todo $\mathbb{R}$ y en particular en el intervalo [−π, π], siendo $f(-\pi)=\text{sen}(-\pi)-(-\pi)=0+\pi=\pi>0$; $f(\pi)=\text{sen}(\pi)-(\pi)=0-\pi=-\pi<0$; Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el **teorema de Bolzano**, existe c$\in$(−π, π) tal que: $f(c) = 0$; sen c = c. Por tanto existe al menos una solución real a la ecuación sen(x)= x.

Ejercicio 9:

La función exponencial es positiva para todo x $\in \mathbb{R}$, por tanto el denominador de la función no se puede anular. Sólo hay duda de la continuidad en x = 0, que está fuera del intervalo a estudiar, por tanto f(x) es continua en [2. 4]. Tomemos la función *g* definida por g(x) = f(x) − 1. g es continua en el intervalo [2. 4].

$$g(2) = \frac{7-\sqrt{16}}{1+\sqrt{16}} - 1 = \frac{7-4}{1+4} - 1 < 0 \qquad g(4) = \frac{7-\sqrt[4]{16}}{1+\sqrt[4]{16}} - 1 = \frac{7-2}{1+2} - 1 > 0$$

Como se cumplen las tres propiedades anteriores según el **teorema de Bolzano**, existe c $\in$(2, 4) tal que:

$$g(c) = 0 \qquad f(c) - 1 = 0 \qquad f(c) = 1$$

Ejercicio 10:

La función es continua en el intervalo [1, 5], como consecuencia podemos afirmar que **está acotada** en dicho intervalo. Por ser continua en el intervalo [1, 5] se cumple el **teorema de Weierstrass**, que afirma que se **alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos** en el intervalo [1, 5].

Ejercicio 11:

La función es continua por ser la suma de funciones continuas, además f(0) = 0 + sen 0 − 1 = − 1 < 0 y f(π/2) = π/2 + sen π/2 − 1 = π/2 > 0. Por cumplirse el **teorema de Bolzano**, podemos afirmar que al menos existe un valor c que pertenece al intervalo (o, π/2) tal que: f(c) = 0 c + sen c − 1 = 0. Por tanto **existe al menos una solución real** a la ecuación x + sen x − 1 = 0.

Ejercicio 12:

Sea la función definida por h(x) = f(x) − g(x). Por ser continuas f y g en [a, b], la función h también lo es, además f(a)>g(a); h(a)=f(a)−g(a)>0; f(b)<g(b); h(b)=f(b)−g(b)<0. Por cumplirse las tres propiedades anteriores según el teorema de Bolzano, existe c $\in$(a, b) tal que: h(c)=0; f(c)−g(c)=0; **f(c) = g(c)**

Ejercicio 13:

La función es continua en [0, 2]. No es aplicable el **teorema de Rolle** porque la función no es derivable en el punto x = 1.

$$f'(x)-\begin{cases}-1 & Si\ x\in(0,1)\\ 1 & Si\ x\in[1,2)\end{cases}\qquad f'(1^-)=-1\qquad f'(1^+)=1$$

Ejercicio 14:

f(x) es una función continua en los intervalos [−1, 0] y [0, 1] y derivable en los intervalos abiertos (−1, 0) y (0, 1) por ser una función polinómica. Además se cumple que: f(−1) = f(0) = f(1) = 0, por tanto es aplicable el **teorema de Rolle**.

$$f'(c)=0\qquad 1-3c^2=0\qquad c=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad -\frac{\sqrt{3}}{3}\in(-1,0)\qquad \frac{\sqrt{3}}{3}\in(0,1)$$

Ejercicio 15:

La función es continua en el intervalo [−1, 1] y derivable en (−1, 1) por ser una función polinómica. No cumple **teorema de Rolle** porque f(−1) ≠ f(1).

Ejercicio 16:

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Si la función tuviera dos raíces distintas x_1 y x_2, siendo $x_1 < x_2$, tendríamos que $f(x_1) = f(x_2) = 0$; y como la función es continua y derivable por ser una función polinómica, podemos aplicar el **teorema del Rolle**, que diría que existe un c ∈ (x_1, x_2) tal que f'(c) = 0. f' (x) = 2 + 6x + $12x^2$ f' (x) = 2 (1+ 3x + $6x^2$). Pero f' (x) ≠ 0, no admite soluciones reales porque el discrimínante es negativo: Δ = 9 − 24 < 0. Como la derivada no se anula en ningún valor, está en contradicción con el **teorema de Rolle**, por lo que la hipótesis de que existen dos raíces es falsa.

Ejercicio 17:

La función f(x) = x^3 + $6x^2$ + 15x − 25 es continua y derivable en $\mathbb{R}$. f(0) = −25; f(2) = 37. Por tanto por el **Teorema de Rolle** la ecuación tiene al menos una solución en el intervalo (0,2). f'(x) = $3x^2$ + 12x +15. Dado que la derivada no se anula, ya que su discriminante es negativo, la función es estrictamente creciente y posee una única raíz.

Ejercicio 18:

La función f(x) = $2x^3$ − 6x + 1 es continua y derivable en $\mathbb{R}$. f(0) = 1; f(1) = −3. Por tanto por el **Teorema de Rolle** la ecuación tiene al menos una solución en (0, 1). f' (x) = $6x^2$ - 6; $6x^2$ - 6 = 0 6(x − 1) (x + 1) = 0. La derivada se anula en x = 1 y x = −1, por tanto no puede haber dos raíces en el intervalo (0, 1).

Ejercicio 19:

f(x) es continua en [0, 2] y derivable en (0, 2) por tanto se puede aplicar el **teorema del valor medio o de Lagrange**:

$$\frac{7-1}{2-0}=f'(c)\qquad f'(c)=3\qquad 8c-5=3\qquad c=1$$

A la función g(x)=1/x^2 no se le puede aplicar el teorema de Lagrange ya que no es continua en [0,2]

Ejercicio 20:

Los puntos A=(1,1) y B=(3,0) pertenecientes a la parábola de ecuación y=x^2+bx+c:

$$\begin{cases}1=1+b+c\\ 0=9+3b+c\end{cases}\qquad b=-\frac{9}{2}\qquad c=\frac{9}{2}$$

y la parábola es $y - x^2-\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}$

Por ser la función polinómica se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo [1, 3].

$$f'(c)=2c-\frac{9}{2}\qquad \frac{9-\frac{27}{2}+\frac{9}{2}-1+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}}{2}=2c-\frac{9}{2}\qquad -\frac{1}{2}=2c-\frac{9}{2}\qquad c=2\qquad f(c)=4-9+\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}\qquad \left(1,-\frac{1}{2}\right)$$

Ejercicio 21:

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos.

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{20-2}\qquad 9x-9=y-2\qquad y=9x-7$$

Por ser y = x^3 − x^2 + 2 continua en [1, 3] y derivable en (1, 3) se puede aplicar el **teorema del valor medio**:

$$\frac{20-2}{3-1}=f'(c)\qquad f'(c)=9\qquad 3c^2-2c=9\qquad 3c^2-2c-9=0\qquad c=\frac{2+\sqrt{112}}{6}\in(1,3)\qquad c=\frac{2-\sqrt{112}}{6}\notin(1,3)$$

Ejercicio 22:

En primer lugar se debe cumplir que la función sea continua en [2, 6].

$$\lim_{x\to 4^-}f(x)=\lim_{x\to 4^+}f(x)\qquad 4a-3=-16+40-b\qquad a+b=27$$

En segundo lugar se debe cumplir que la función sea derivable en (2, 6).

$$f'(4^-)=f'(4^+)\qquad a=-2\cdot 4+10\qquad a=2\qquad b=19$$