MATEMATICAS. BC2 TEMA 8: Derivabilidad

1. Calcula la derivada explicita o implícita de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \ln \dfrac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$ 2. $f(x) = arctg \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 3. $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$ 4. $f(x) = arc\,sen\, x^{\cos^2 x}$

5. $f(x) = \log_x tg\, x$ 6. $x^2 y - x y^2 + y^2 = 7$ 7. $x^2 \,sen(x+y) - 5y\, e^x = 3$

2. Dada la curva de ecuación $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$, halla las coordenadas de los puntos de dicha curva en los que la tangente forma con el eje OX un ángulo de 45°.

3. ¿Qué velocidad lleva un vehículo que se mueve según la ecuación $e(t) = 2 - 3t^2$ en el quinto segundo de su recorrido? (espacio en metros y tiempo en segundos)

4. Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de un millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 10^6 & \text{si} \quad 0 \le t \le 2 \\ 10^6 \cdot e^{t-2} & \text{si} \quad t > 2 \end{cases}$$

1. Verificar que la población es función continua del tiempo.
2. Calcular la tasa de variación media en los intervalos [0, 2] y [0, 4].
3. Calcular la tasa de variación instantánea en t = 4.

5. Hallar el punto en que $y=|x+2|$ no tiene derivada. Justificar el resultado dibujando su gráfica.

6. Hallar los puntos en que $y=|x^2-5x+6|$ no tiene derivada. Justificar el resultado en su gráfica.

7. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + 2 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{2x}{\pi} + 1 & si \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ sen\, x + 1 & si \quad x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

8. ¿Para qué valores de ***a*** es derivable la función: $f(x) - \begin{cases} 3 \quad ax^2 & si \quad x \le 1 \\ \dfrac{2}{ax} & si \quad x > 1 \end{cases}$

9. Estudiar para qué valores de a y b la función es continua y derivable: $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$

10. Determinar los valores de a y b para que la función sea derivable:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & Si \quad x \le -1 \\ \dfrac{a}{x} & Si \quad -1 < x \le 1 \\ \dfrac{x^2 + ax + 1}{x+1} & Si \quad x > 1 \end{cases}$$

11. Calcula el valor de la derivada $f(x) = \dfrac{x}{x \quad 1}$ en x = 2.

12. Una población tiene un crecimiento dado por la función $p(t) = 5000 + 1000t^2$, siendo t el tiempo medido en horas. Se pide:

1. La velocidad media de crecimiento.
2. La velocidad instantánea de crecimiento.
3. La velocidad de crecimiento instantáneo para $t_0 = 10$ horas.

13. Determinar los valores que debe tomar el parámetro b, para qué las tangentes a la curva de la función $f(x) = b^2x^3 + bx^2 + 3x + 9$ en los puntos de abscisas x = 1, x = 2 sean paralelas.

14. Calcular la diferencial de las siguientes funciones:

1 $f(x) = 3x^2 + 5x - 6$ 2 $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2}$ 3 $f(x) = 7^{3x^2-1}$

4 $f(x) = e^{tgx}$ 5 $f(x) = \ln sen\sqrt{x}$ 6 $f(x) = \log_x \sqrt{x}$

15. Un cuadrado tiene 2m de lado. Determina en cuánto aumenta el área del cuadrado cuando su lado lo hace en un mm. Calcula el error cometido al usar diferenciales en lugar de incrementos.

16. Hallar la variación de volumen en un cubo de arista 20cm, cuando ésta aumenta 0.2 cm.

17. Calcula el error absoluto y relativo cometido en el cálculo del volumen de una esfera de 12.51 mm de diámetro, medido con un instrumento que aprecia milésimas de centímetro.

18. Si el lugar de $\sqrt{0.80}$ se halla $\sqrt{0.81} = 0.9$. ¿Cuáles son las aproximaciones del error absoluto y relativo?

SOLUCIONES

Ejercicio 1:

1. Aplicando las **propiedades de los logaritmos** obtenemos:

$$f(x)=\ln(x-2)^3-\ln\sqrt{2x-1}=3\ln(x-2)-\frac{1}{2}\ln(2x-1)\ ;\quad f'(x)=3\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}=\frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}=$$

$$f'(x)=3\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1}=\frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}==\frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$$

2.
$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}==\frac{1}{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{\frac{2(1-x^2)+2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1}{\frac{1}{1-x^2}}\cdot\frac{\frac{2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=(1-x^2)\cdot\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}==\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3.
$$f'(x)=-sen\,(\cos(\cos x))\cdot sen\,(\cos x)\cdot sen\,x$$

4.
$$f'(x)=\frac{\left(-2\,sen\,x\cdot\cos x\cdot\ln x+\cos^2 x\cdot\frac{1}{x}\right)arc\,sen\,x^{\cos^2 x}}{\sqrt{1-\left(x^{\cos^2 x}\right)^2}}$$

5. Aplicamos **la definición de logaritmo**: $y=\log_x tg\,x \qquad x^y=tg\,x$

$$\ln x^y=\ln tg\,x \qquad y\ln x=\ln tg\,x \qquad f(x)=\frac{\ln tg\,x}{\ln x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\left(\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg\,x}\cdot\ln x+\frac{\ln tg\,x}{x}\right)==\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\left(\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{sen\,x}{\cos x}}\cdot\ln x+\frac{\ln tg\,x}{x}\right)==\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\left(\frac{\ln x}{sen\,x\cdot\cos x}+\frac{\ln tg\,x}{x}\right)$$

6
$$x^2y-xy^2+y^2=7 \qquad 2xy+x^2y'-(y^2+2xyy')+2yy'=0$$

$$2xy+x^2y'-y^2-2xyy'+2yy'=0 \qquad x^2y'-2xyy'+2yy'=-2xy+y^2$$

$$y'(x^2-2xy+2y)=y^2-2xy \qquad y'=\frac{y^2-2xy}{x^2-2xy+2y}$$

7
$$x^2\,sen(x+y)-5y\,e^x=3 \qquad y'=\frac{-\left[2x\ sen(x+y)+x^2\cos(x+y)-5y\,e^x\right]}{x^2\cos(x+y)-5e^x}=$$

$$y'=\frac{2x\ sen(x+y)+x^2\cos(x+y)-5y\,e^x}{-x^2\cos(x+y)+5e^x}$$

Ejercicio 2:

$$f'(x)=tg\,45^\circ=1 \qquad 1=\lim_{h\to0}\frac{2(x+h)^2-3(x+h)-1-(2x^2-3x-1)}{h}$$

$$1=\lim_{h\to0}\frac{2x^2+4xh+2h^2-3x-3h-1-2x^2+3x+1}{h}\ ;\quad 1=\lim_{h\to0}\frac{h(4x+2h-3)}{h}$$

$$1=4x-3 \qquad x=1 \qquad f(1)=2\cdot1^2-3\cdot1-1=-2 \qquad P(1,-2)$$

Ejercicio 3:

$$v_5'=\lim_{h\to0}\frac{2-3(5+h)^2-2+3\cdot5^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-30h-3h^2}{h}==\lim_{h\to0}\frac{h(-30-3h)}{h}=-30\,\frac{m}{s}$$

Ejercicio 4:

1.
$$f(2)=10^6 \quad \lim_{t\to2^-}10^6=10^6 \qquad \lim_{t\to2^+}10^6\cdot e^{t-2}=10^6$$

2. $\text{TVM}=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{10^6-10^6}{2}=0$; $\text{TVM}=\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=\dfrac{10^6\cdot e^2-10^6}{4}=1.59\cdot 10^6$

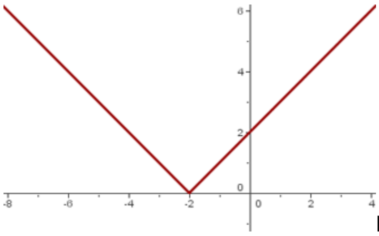
3. $f'(t)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad 0\le t\le 2\\ 10^6\cdot e^{t-2} & \text{si} \quad t>2\end{cases}$ $\quad f'(4)=10^6\cdot e^2=7.38\cdot 10^6$

Ejercicio 5:

$f(x)=\begin{cases}-x-2 & \text{si } x<-2\\ x+2 & \text{si } x\ge -2\end{cases}$ $\quad f(-2)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$

La función es continua en toda $\mathbb{R}$.

$f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<-2\\ 1 & \text{si } x>-2\end{cases}$ $\quad$ **$f'(-2)^-=-1$; $f'(-2)^+=1$** No es derivable en: $x=-2$.



En $x=-2$ hay un pico, por lo que no es derivable en $x=-2$.

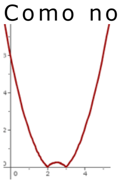
Ejercicio 6:

$f(x)=\begin{cases}x^2-5x+6 & \text{si } x<2\\ -x^2+5x-6 & si\ 2\le x<3\\ x^2-5x+6 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$ $\quad f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$

$f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=0$ $\quad$ La función es continua en toda $\mathbb{R}$.

$f'(x)=\begin{cases}2x-5 & \text{si } x<2\\ -2x+5 & si\ 2<x<3\\ 2x-5 & \text{si } x>3\end{cases}$ $\quad$ **$f'(2)^-=-1 f'(2)^+=1$; $f'(3)^-=-1 f'(3)^+=1$**

Como no coinciden las derivadas laterales la función no será derivable en: $x=2$ y $x=3$.



En $x=2$ y en $x=3$ tenemos dos puntos angulosos, por lo que la función **no es derivable en ellos.**

Ejercicio 7:

La función no es continua en $x=0$ porque no tiene imagen. Por tanto tampoco es derivable.

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=sen\,\dfrac{\pi}{2}+1=2$ $\quad \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\dfrac{2x}{\pi}+1=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} sen\,\dfrac{\pi}{2}+1=2$ $\quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)} f(x)$

Por lo que es continua en pi/2, veamos si también es derivable o no:

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-=\dfrac{2}{\pi}$ $\qquad f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^+=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

Como las derivadas laterales no coinciden no es derivable en el punto.

Ejercicio 8:

Continuidad en $x=1$ $\quad f(1)=3-a$; $\quad \lim\limits_{x\to 1^-}\left(3-ax^2\right)=3-a$ $\quad \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2}{ax}\right)=\dfrac{2}{a}$

$3-a=\dfrac{2}{a}$ $\quad a^2-3a-2=0$ $\quad a=1$ $\quad a=2$

$f'(x)=\begin{cases}-2ax & \text{si } x<1\\ \dfrac{-2}{ax^2} & \text{si } x>1\end{cases}$; $\quad f'(1^-)=-2a$ $\quad f'(1^+)=\dfrac{-2}{a}$

$-2a=\dfrac{-2}{a}$ $\quad a^2=1$ $\quad a=\pm 1$ $\quad$ Derivable para $a=1$; Para $a=-1$ no es continua

Ejercicio 9:

$f(0)=b \qquad \lim_{x\to 0^-}(x^3-x)=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b \qquad b=0$

$f'(x)=\begin{cases}3x^2-1 & \text{si} \quad x<0\\ a & \text{si} \quad x>0\end{cases}$; $f'(0^-)=-1 \quad f'(0^+)=a \qquad a=-1$

Ejercicio 10:

Para qué una función sea derivable tiene que ser continua. En este caso la función no es continua para x = 0 cualesquiera que sean a y b, es decir, no existen valores de a y b que hagan continua la función. Por tanto, no existen valores de a y b para los cuales la función sea derivable.

Ejercicio 11:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{x+h-1}-\frac{x}{x-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-x+hx-h-x^2-hx+x}{(x+h-1)(x-1)}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x-1)^2};\quad f'(2)=\frac{-1}{(2-1)^2}=-1$$

Ejercicio 12:

1. $v_m=\dfrac{p(t+h)-p(t)}{h}==\dfrac{5000+100(t+h)^2-5000-100t^2}{h}=200t-100h$

2. $p'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{5000+100(t+h)^2-5000-100t^2}{h}=\lim_{h\to 0}(200t-100h)=200t$

3. $p'(10)=200\cdot 10=2000$

Ejercicio 13:

Para que sean paralelas las derivadas en x = 1 y x = 2 deben ser iguales: f'(1) = f'(2)
$f'(x) = 3b^2x^2 + 2bx + 3$; $f'(1) = 3b^2 + 2b + 3$; $f'(2) = 12b^2 + 4b + 3$;
$3b^2 + 2b + 3 = 12b^2 + 4b + 3$; $9b^2 + 2b = 0$; **SOLUCIONES: b = 0 b = −2/9**

Ejercicio 14:

1 $f(x)=3x^2+5x-6 \qquad df(x)=(6x+5)dx$

2 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2} \qquad df(x)=\dfrac{x^2-(x+2)\cdot 2x}{x^4}dx=\dfrac{x^2-2x^2-4x}{x^4}dx=-\dfrac{x+4}{x^3}dx$

3 $f(x)=7^{3x^2-1} \qquad df(x)=6x\cdot 7^{3x^2-1}dx$

4 $f(x)=e^{tgx} \qquad df(x)=(1+tg^2x)\cdot e^{tgx}dx$

5 $f(x)=\ln sen\sqrt{x} \qquad df(x)=\dfrac{1}{sen\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx==\dfrac{cotg\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$

6 $y=\log_x\sqrt{x} \qquad x^y=\sqrt{x};\ \ln x^y=\ln\sqrt{x} \qquad y\ln x=\frac{1}{2}\ln x;\ f(x)=\frac{1}{2} \qquad df(x)=0$

Ejercicio 15:

$S=x^2 \qquad \Delta S=(x+h)^2-x^2=2.001^2-4=0.004001\,m^2$

$dS=2x\cdot dx=4\cdot 0.001=0.004\,m^2 \qquad Error=\Delta S-dS=10^{-6}\ m^2$

Ejercicio 16:

$V=x^3 \qquad dV=3x^2\,dx \quad dV=3\cdot 20^2\cdot 0.2=240\,cm^3$

Ejercicio 17:

$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad dr=0.01\ mm;\ dV=4\pi r^2\ dr \qquad dV=4\pi\cdot 6.255^2\cdot 0.01=4.917\ mm^3$

$\dfrac{dV}{V}=\dfrac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\dfrac{3dr}{r} \qquad \dfrac{dV}{V}=\dfrac{3\cdot 0.01}{6.255}=0.0048$

Ejercicio 18:

$f(x)=\sqrt{x} \qquad dx=0.81-0.80=0.01$

$df(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \qquad df(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{0.81}}\cdot 0.01=\dfrac{1}{180};\ \dfrac{df(x)}{f(x)}=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}=\dfrac{dx}{2x} \qquad \dfrac{df(x)}{f(x)}=\dfrac{0.01}{2\cdot 0.81}=\dfrac{1}{162}$